

Vysoká škola chemicko-technologická v Praze

DISERTAČNÍ PRÁCE

2004

Miroslava Dubcová

Vysoká škola chemicko-technologická v Praze

Fakulta chemicko-inženýrská

Ústav matematiky

**Stabilita různých typů řešení v mřížkových
dynamických systémech**

Miroslava Dubcová

Školitel: Doc. RNDr. Daniel Turzík, CSc.

Studijní program: Aplikovaná matematika

Studijní obor: Aplikovaná matematika

Práce byla vypracována na Ústavu matematiky VŠCHT v Praze v období
1. 9. 2001 - 23. 1. 2004

Prohlašuji, že jsem v předložené disertační práci použila jen pramenů, které cituji a uvádím v seznamu použité literatury.

V Praze, 23. ledna 2004

Miroslava Dubcová

Poděkování:

Chtěla bych poděkovat svému školiteli Doc. RNDr. Danielovi Turzíkovi, CSc. za to, že mi umožnil realizovat tuto práci.

Zároveň bych chtěla poděkovat všem pracovníkům semináře „Diskrétní dynamické systémy“ za pomoc, odborné rady a vytvoření příjemného pracovního prostředí.

Obsah

1	Úvod	4
2	Základní pojmy, definice a věty použité v práci	5
2.1	Spektrální teorie	5
2.2	Banachovy algebry	7
2.3	Gelfandova transformace	8
2.4	Stabilita pevného bodu zobrazení v Banachových prostorech	8
2.5	Diskrétní dynamické systémy na Banachových prostorech	10
3	Mřížkové dynamické systémy (LDS)	12
3.1	Motivace	12
3.2	Definice LDS	12
3.3	Fréchetova derivace	16
4	Stabilita prostorově homogenních řešení LDS s jednorozměrnou mřížkou	20
4.1	Jednodimenzionální LDS na \mathbb{B}	20
4.2	Maticové operátory	24
4.3	Jednodimenzionální LDS na $\mathbb{B}(d)$	30
5	Stabilita prostorově periodických řešení LDS s jednorozměrnou mřížkou	32
5.1	Příklad LDS s prostorovou interakcí difuzního typu	33
5.2	Případ fázového prostoru \mathbb{B}	35
5.3	Případ fázového prostoru \mathbb{B}_q	37
6	Stabilita prostorově homogenních řešení LDS s vícerozměrnou mřížkou	40
6.1	Vícedimenzionální LDS na \mathbb{B}	41
6.2	Vícedimenzionální LDS na $\mathbb{B}(d)$	48
7	Stabilita prostorově periodických řešení LDS s vícerozměrnou mřížkou	51
8	Závěr	57

1 Úvod

V mnoha "fyzikálních" článcích byly v druhé polovině 80 let uvedeny nekonečně dimenzionální dynamické systémy nazývané mřížkové dynamické systémy (Lattice dynamical Systems - LDS) někdy též propojená mřížková zobrazení (Coupled Map Lattices - CML). Mřížkové dynamické systémy byly široce studovány jako příklady pro vícedimenzionální chaos. Tyto příklady byly bohatě napočítány např. v práci [16]. Velké množství výpočetních experimentů kontrastovalo s relativně malým počtem matematických článků, které by obsahovaly matematicky přesné zkoumání tohoto fenoménu nacházejícího se v LDS. První matematický článek o LDS je pravděpodobně [8]. Tento článek společně s články [3] a [7] obsahuje výborný úvod do problematiky LDS.

Jedním z nejvýznamnějších problémů v teorii LDS je problém stability stacionárního řešení. To vede k určení spektra odpovídajícího linearizovaného operátoru. Tento problém je řešen v případě 1-dimenzionální mřížky v článku [2] a pro vícedimenzionální mřížku v článku [4]. Základní metoda použitá v obou těchto pracích je metoda aproximace linearizovaného operátoru konečně dimenzionálními operátory.

V této práci ukážeme jiné metody pro určení spektra linearizovaného operátoru. Tyto metody pracují efektivně pro prostorově homogenní a pro prostorově periodická stacionární řešení. Náš přístup je založen na reprezentaci odpovídajícího lineárního operátoru jako kombinaci posunů (shifts) na mřížce. V případě jednodimenzionální mřížky jsme k určení spektra lineárního operátoru využili věty o obrazu spektra na Banachových prostorech, v případě vícedimenzionálních mřížek jsme využili vlastností Gelfandovy transformace na vhodné Banachově algebře.

Pro pohodlné čtení výsledků naší práce uvádíme v druhé kapitole některé důležité pojmy, definice a věty, které budeme potřebovat. Ve třetí kapitole je uvedena definice mřížkových dynamických systémů a jejich motivace. Ve čtvrté až sedmé kapitole jsou naše hlavní výsledky z teorie mřížkových dynamických systémů spolu s aplikacemi na konkrétní příklady. Práce je rozdělena na výsledky v jednorozměrných LDS (čtvrtá a pátá kapitola) a ve vícerozměrných LDS (šestá a sedmá kapitola). Přestože výsledky ve vícerozměrných LDS se samozřejmě dají aplikovat na jednorozměrné, uvádíme jednorozměrné LDS odděleně, protože přístup je trochu odlišný.

Výsledky této práce byly publikovány v článcích [9, 22, 10]

2 Základní pojmy, definice a věty použité v práci

V této kapitole uvedeme některé pojmy, definice a věty z funkcionální analýzy, dynamických systémů a jiných oblastí matematiky, které budeme v práci používat, viz [19, 21, 1, 11, 15].

2.1 Spektrální teorie

Podrobněji naleznete spektrální teorii např. v [21, 19].

Nechť X je normovaný vektorový prostor, nad tělesem komplexních čísel \mathbb{C} a $T : X \rightarrow X$ je lineární operátor jehož definiční obor budeme značit $\mathcal{D}(T)$ a obor hodnot $\mathcal{R}(T)$.

Definice 2.1 Rezolventní množina operátoru T je množina

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)} = X \text{ a } (T - \lambda I)^{-1} \text{ existuje a je spojitý}\}.$$

Spektrum operátoru T je množina

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Definice 2.2 Rozklad spektra.

Spojité spektrum $C_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)} = X \text{ a } (T - \lambda I)^{-1} \text{ existuje, ale není spojitý}\}$

Reziduální spektrum $R_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \overline{\mathcal{R}(T - \lambda I)} \neq X \text{ a } (T - \lambda I)^{-1} \text{ existuje}\}$

Bodové spektrum $P_\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (T - \lambda I)^{-1} \text{ neexistuje}\}.$

V dalším se omezíme na operátory definované na úplných vektorových prostorech. Nechť X je Banachův prostor (úplný vektorový prostor) s normou $\|\cdot\|_X$. Označme $\mathcal{L}(X)$ Banachův prostor všech omezených (spojitých) lineárních zobrazení na Banachově prostoru X , t.j.

$$\mathcal{L}(X) = \{T : X \rightarrow X, \text{ kde } T \text{ je omezené lineární zobrazení}\},$$

kde norma je definována vztahem

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_X : \|x\|_X \leq 1\}.$$

Symbolem I budeme značit identické zobrazení X na X . Prvky prostoru $\mathcal{L}(X)$ budeme nazývat operátory.

Definice 2.3 Spektrum operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$ je množina všech $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které platí, že operátor $T - \lambda I$ není prostý nebo $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq X$. Spektrum operátoru T označíme symbolem $\sigma(T)$.

Protože prostor $\mathcal{L}(X)$ je Banachův, je tato definice spektra v souladu s definicí 2.1. Pro důkazy některých našich vět budeme potřebovat následující větu.

Věta 2.1 *Nechť X je Banachův prostor a T je lineární operátor definovaný na X a s oborem hodnot rovným X . Je-li T spojitý a T^{-1} existuje, je i T^{-1} spojitý.*

Komplexní číslo λ se nazývá vlastní hodnota operátoru $T \in \mathcal{L}(X)$, existuje-li $x \in X$, pro které platí $Tx = \lambda x$. Množina všech vlastních hodnot operátoru T je bodové spektrum $P_\sigma(T)$. Platí $P_\sigma(T) \subset \sigma(T)$.

Označme $\mathcal{U}(T)$ množinu všech funkcí $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, které jsou analytické na nějakém okolí $\sigma(T)$. Platí následující věta (viz [11, Chapter 7, Theorem 11])

Věta 2.2 (*Věta o obrazu spektra.*) *Nechť $T \in \mathcal{L}(X)$ a funkce $f \in \mathcal{U}(T)$ potom*

$$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)).$$

Nakonec si uvedeme pojem normovaného duálního prostoru a duálního operátoru ke spojitému lineárnímu operátoru.

Nechť X je normovaný vektorový prostor s tělesem skalárů \mathbb{C} . Toto těleso je Banachův prostor, v němž je norma prvku λ rovna absolutní hodnotě $|\lambda|$.

Definice 2.4 Označme X' množinu všech spojitých lineárních funkcionalů na prostoru X . Definujeme-li v X' normu rovností

$$\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|, \quad \text{pro } x' \in X',$$

je X' Banachův prostor, který se nazývá normovaný duální prostor k prostoru X .

Nechť X je normovaný vektorový prostor, nechť $T \in \mathcal{L}(X)$. Pro $y' \in X'$ je lineární funkcional x' , definovaný na X rovností $x'(x) = y'(Tx)$, zřejmě spojitý, tedy $x' \in X'$. Budeme psát $x' = T'y'$.

Definice 2.5 Lineární operátor $T' : X' \rightarrow X'$ definovaný vztahem

$$x' = T'y' \Leftrightarrow x'(x) = y'(Tx), \quad \text{pro } x', y' \in X'$$

se nazývá duální operátor k operátoru T .

2.2 Banachovy algebry

V následujícím odstavci uvedeme některé pojmy z teorie Banachových algeber. Podrobnější teorie je uvedena např. v [1, 19].

Definice 2.6 Algebrou \mathcal{A} nad tělesem komplexních čísel \mathbb{C} rozumíme vektorový prostor, kde je navíc definované násobení prvků algebry \mathcal{A} , které je asociativní, distributivní vzhledem k sčítání a splňuje rovnost

$$\lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b \quad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C}, a, b \in \mathcal{A}.$$

Jednotka algebry je takový prvek e , pro který platí $ae = ea$ pro každé $a \in \mathcal{A}$.

Definice 2.7 Banachova algebra \mathcal{A} je algebra opatřená normou, ve které je \mathcal{A} Banachův prostor (úplný vektorový prostor) a platí následující podmínka

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Nadále budeme předpokládat, že \mathcal{A} je Banachova algebra s jednotkou e , pro níž $\|e\| = 1$.

Definice 2.8 Řekneme, že prvek $a \in \mathcal{A}$ je invertibilní, existuje-li $x \in \mathcal{A}$, takové, že $ax = xa = e$.

Definice 2.9 Pro $a \in \mathcal{A}$ definujeme rezolventu $\varrho_{\mathcal{A}}(a)$ jako množinu všech $\lambda \in \mathbb{C}$, pro něž prvek $\lambda e - a$ je invertibilní. Spektrum $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ prvku a je množina $\mathbb{C} \setminus \varrho_{\mathcal{A}}(a)$. Spektrální poloměr je číslo

$$r_{\mathcal{A}}(a) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)\}.$$

Bude-li zřejmé o jakou Banachovu algebru se jedná, budeme místo $\varrho_{\mathcal{A}}(a)$, $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ resp. $r_{\mathcal{A}}(a)$ psát $\varrho(a)$, $\sigma(a)$ resp. $r(a)$.

Vektorový prostor $\mathcal{L}(X)$ s operací skládání operátorů je Banachova algebra všech lineárních operátorů na Banachově prostoru X . Platí následující věta, kterou budeme využívat.

Věta 2.3 *Nechť X je Banachův prostor a $a \in \mathcal{L}(X)$. Pak*

$$r_{\mathcal{L}(X)}(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}.$$

Jiným příkladem Banachovy algebry, který budeme potřebovat, je prostor všech spojitých funkcí na kompaktní množině. Tuto Banachovu algebru označíme $C(K)$, kde K je zmíněná kompaktní množina.

2.3 Gelfandova transformace

V tomto oddíle budeme předpokládat, že \mathcal{A} je Banachova algebra s jednotkou e , přičemž platí $\|e\| = 1$.

Definice 2.10 Charakterem χ na algebře \mathcal{A} rozumíme každý nenulový multiplika-
tivní lineární funkcionál ($\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$) pro všechny $a, b \in \mathcal{A}$ z \mathcal{A} do \mathbb{C} .

Množinu všech charakterů označme $\Omega(\mathcal{A})$. Platí, že každý charakter χ je spojitý
lineární funkcionál, pro který platí $\|\chi\| = 1$

Definice 2.11 Zobrazení $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow C(\Omega(\mathcal{A}))$, které každému $a \in \mathcal{A}$ přiřadí spojitou
funkci $\hat{a} \in C(\Omega(\mathcal{A}))$ ($\hat{a} = \Phi(a)$) předpisem

$$\hat{a}(\chi) = \chi(a),$$

se nazývá Gelfandovou transformací. Spojitému funkcionálu \hat{a} se pak také říká Gel-
fandova transformace prvku a .

Platí následující důležitá věta.

Věta 2.4 (*Vlastnosti Gelfandovy transformace*) *Nechť Φ je Gelfandova transfor-
mace Banachovy algebry \mathcal{A} . Potom*

- (a) Φ je homomorfismus \mathcal{A} na jistou podalgebru prostoru $C(\Omega(\mathcal{A}))$,
- (b) $\sigma_{C(\Omega(\mathcal{A}))}(\hat{a}) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ pro $a \in \mathcal{A}$ a $\hat{a} = \Phi(a)$,
- (c) *Je-li navíc \mathcal{A} komutativní algebra platí:*
 $\sigma_{C(\Omega(\mathcal{A}))}(\hat{a}) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) \quad a \quad r_{\mathcal{A}}(a) = \|\hat{a}\|_{C(\Omega(\mathcal{A}))}.$

Lemma 2.1 *Platí $\chi(a) \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ pro všechny charakterů $\chi \in \Omega(\mathcal{A})$, odtud plyne*

$$\chi(a) \leq r_{\mathcal{A}}(a) \leq \|a\|.$$

2.4 Stabilita pevného bodu zobrazení v Banachových pro- storech

V následujícím odstavci předpokládejme, že X je komplexní Banachův prostor.

Definice 2.12 Bod x nazveme pevným bodem zobrazení $F : X \rightarrow X$, jestliže
 $F(x) = x$.

Symbolem F^n označme $F \circ F \circ F \circ \dots \circ F$ (n -krát složené zobrazení F) pro $n \geq 0$ a $F^{-1} \circ F^{-1} \circ F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}$ (jestliže F^{-1} existuje) pro $n < 0$.

Definice 2.13 Pevný bod x zobrazení $F : X \rightarrow X$ je Ljapunovsky stabilní, právě tehdy, když pro každé okolí U bodu x existuje nějaké okolí $V \subset U$ bodu x takové, že

$$F^n(V) \subset U \quad \text{pro všechna } n \geq 0.$$

Označme $V(x)$ (resp. $U(x)$) okolí V bodu x (resp. okolí U bodu x).

Definice 2.14 Pevný bod x zobrazení $F : X \rightarrow X$ je asymptoticky stabilní, právě když je Ljapunovsky stabilní a

$$\exists V(x) \subset X \text{ takové, že } \forall y \in V(x), F^n(y) \rightarrow x, n \rightarrow \infty.$$

Definice 2.15 Pevný bod x zobrazení $F : X \rightarrow X$ je exponenciálně stabilní, právě když je Ljapunovsky stabilní a

$$\exists V(x) \subset X, \gamma > 0 \text{ a } k \in (0, 1) \text{ takové, že } \forall y \in V(x), \forall n \in \mathbb{N}, \|F^n(y) - x\| \leq \gamma k^n.$$

Definice 2.16 Pevný bod x zobrazení $F : X \rightarrow X$ se nazývá Ljapunovsky nestabilní, právě když není Ljapunovsky stabilní. To znamená, že $\exists \varepsilon > 0$ takové, že

$$\forall \delta > 0, \exists y; \|y - x\| \leq \delta \text{ a } \exists n_0 > 0 \text{ takové, že } \forall n > n_0 \|F^n(y) - x\| > \varepsilon.$$

Definice 2.17 Nechť F je zobrazení z X do X . Nechť $L : X \rightarrow X$ je spojitě lineární zobrazení. Řekneme, že L je Fréchetova derivace zobrazení F v bodě a , jestliže

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(a+h) - F(a) - Lh\|}{\|h\|} = 0.$$

Fréchetovu derivaci zobrazení F v bodě a budeme značit symbolem $dF(a)$.

Pro korektnost definice je třeba vědět, že Fréchetova derivace zobrazení F v bodě a existuje nejvýše jedna. Existuje-li $dF(a)$ (resp. $dF(x)$ pro každé x z otevřené množiny $G \subset X$), říkáme, že F je diferencovatelná v a (resp. v G).

Definice 2.18 Řekneme, že spojitě zobrazení $L : X \rightarrow X$ je Gâteauxova derivace zobrazení F v bodě $a \in X$, jestliže pro každý vektor $v \in X$ platí

$$Lv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(a+tv) - F(a)}{t},$$

(konvergenci uvažujeme v normě prostoru X). Platí tedy, že $Lv = D_v F(a)$, kde $D_v F(a)$ je derivace ve směru v .

Gâteauxovu derivaci budeme značit symbolem $d_G F(a)$.

Následující věta nám řekne něco o stabilitě pevného bodu zobrazení F .

Věta 2.5 *Nechť zobrazení $F : X \rightarrow X$ je diferencovatelné v x a splňuje rovnost $F(x) = x$ a nechť $dF(x) = L \in \mathcal{L}(X)$ je Fréchetova derivace v bodě x . Jestliže spektrální poloměr operátoru L je menší než 1 ($r(L) < 1$), potom pevný bod x je exponenciálně stabilní.*

S nestabilitou pevného bodu je to trochu složitější. Dá se dokázat následující tvrzení.

Věta 2.6 *Nechť $F : X \rightarrow X$ je třídy C^1 na okolí bodu $0 \in X$, splňující rovnost $F(0) = 0$. Nechť $L = dF(0)$ a spektrum $\sigma = \sigma(L)$ je tvaru $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, kde*

$$\sup_{\lambda \in \sigma_1} |\lambda| < \inf_{\lambda \in \sigma_2} |\lambda| \text{ a } \inf_{\lambda \in \sigma_2} |\lambda| > 1.$$

Potom existuje dvojkružel $K \subset X$ a koule B_r se středem v 0 takové, že

$$\forall x \in \bar{B}_r \cap (K \setminus \{0\}) \exists n \in \mathbb{N}; \|F^n(x)\| > r.$$

2.5 Diskrétní dynamické systémy na Banachových prostorech

Definice 2.19 Nechť je dáno zobrazení $\Phi : X \times \mathbb{Z} \rightarrow X$, kde X je Banachův prostor. Označme $\Phi_n : X \rightarrow X$, $x \mapsto \Phi(x, n)$. Nechť pro každé $n \in \mathbb{Z}$ je Φ_n třídy C^r . Potom se zobrazení Φ nazývá diskrétní C^r -dynamický systém na X , jestliže platí

1. $\Phi_0 = Id$ -identické zobrazení na X
2. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ je zobrazení $\Phi_n : X \rightarrow X$ C^r -difeomorfismus (homeomorfismus je-li $r = 0$)
3. $\Phi_n \circ \Phi_s = \Phi_{n+s}$ pro všechny $n, s \in \mathbb{Z}$

Diskrétní dynamický systém budeme značit $(\Phi_n, X)_{n \in \mathbb{Z}}$, a prostor X budeme nazývat fázový prostor.

Jestliže Φ_n je třídy C^r (ne nutně difeomorfismus), pak zobrazení $\Phi : X \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow X$ se nazývá diskrétní dynamický systém $(\Phi_n, X)_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Příkladem diskrétního dynamického systému je $\Phi : X \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow X$, $\Phi(x, n) = F^n(x)$, kde $F : X \rightarrow X$ a

$F^n = F \circ F \circ \dots \circ F$ (n -krát). Říkáme potom, že $(F^n, X)_{\mathbb{Z}^+}$ je diskrétní dynamický systém generovaný zobrazením F . Někdy se takovému diskrétnímu dynamickému systému říká semidynamický diskrétní systém a pojem dynamický diskrétní systém se použije v případě nahradíme-li množinu \mathbb{Z}^+ množinou \mathbb{Z} .

3 Mřížkové dynamické systémy (LDS)

3.1 Motivace

Mřížkové dynamické systémy jsou modelem pro širokou třídu časově-prostorových tříd fyzikálních a chemických problémů. Jedním zdrojem LDS jsou diskretizované parciální diferenciální rovnice. Předpokládejme například parabolickou rovnici pro reálnou funkci dvou reálných proměnných $v(x, t)$

$$v_t = v_{xx} + g(v, v_x), \quad (1)$$

kde $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ (v tomto případě nemáme pevné okrajové podmínky). Diskretizujme rovnici (1) v prostoru (to je v proměnné x) s krokem h , v čase (to je v proměnné t) s krokem τ . Označme $u_j(n)$ odpovídající aproximovanou hodnotu $v(jh, n\tau)$ pro $n \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$. Vezmeme-li standardní aproximaci

$$v_t(jh, n\tau) \approx \frac{u_j(n+1) - u_j(n)}{\tau},$$

$$v_x(jh, n\tau) \approx \frac{u_{j+1}(n) - u_j(n)}{h}$$

a

$$v_{xx}(jh, n\tau) \approx \frac{u_{j+1}(n) - 2u_j(n) + u_{j-1}(n)}{h^2}$$

dostaneme vztah

$$\frac{u_j(n+1) - u_j(n)}{\tau} = \frac{u_{j+1}(n) - 2u_j(n) + u_{j-1}(n)}{h^2} + g\left(u_j(n), \frac{u_{j+1}(n) - u_j(n)}{h}\right). \quad (2)$$

Upravíme-li vhodně rovnici (2) dostáváme následující LDS:

$$u_j(n+1) = \frac{\tau}{h^2}(u_{j+1}(n) + u_{j-1}(n)) + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right)u_j(n) + \tau g\left(u_j(n), \frac{u_{j+1}(n) - u_j(n)}{h}\right). \quad (3)$$

Podobné motivace najdeme v knihách [20, 6]. LDS mají mnoho aplikací například i v chemických reakčních teoriích (viz [12, 17, 18]).

3.2 Definice LDS

Nechť \mathbb{Z}^m je množina všech uspořádaných m -tic celých čísel, mající roli m -rozměrné mřížky a \mathbb{R}^d je standardní d -dimenzionální reálný prostor. Uvažujme množinu

$$\tilde{\mathbb{B}}(d) = \{\mathbf{u}; \mathbf{u} = \{u_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m}, u_{\vec{j}} \in \mathbb{R}^d\},$$

$u_{\vec{j}}$ můžeme interpretovat jako vektory z \mathbb{R}^d , které charakterizují stav m -dimenzionálního diskrétního média. Symbolem $(\mathbf{u})_{\vec{j}}$ budeme značit $u_{\vec{j}}$, t.j.

$$(\mathbf{u})_{\vec{j}} = u_{\vec{j}}, \quad \text{pro } \vec{j} \in \mathbb{Z}^m.$$

Na množině $\tilde{\mathbb{B}}(d)$ uvažujme normu:

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|_{\infty} = \sup_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m} |u_{\vec{j}}|,$$

kde $|u_{\vec{j}}|$ je Euklidovská norma na \mathbb{R}^d . Označme

$$\mathbb{B}(d) = \{\mathbf{u} \in \tilde{\mathbb{B}}(d); \|\mathbf{u}\| < \infty\}$$

Lemma 3.1 *Lineární prostor $\mathbb{B}(d)$ je úplný.*

Důkaz:

Nechť posloupnost $\{\mathbf{u}^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}(d)$ je cauchyovská, potom posloupnost $\{u_{\vec{j}}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je také cauchyovská v \mathbb{R}^d pro každé $\vec{j} \in \mathbb{Z}^m$. Prostor \mathbb{R}^d je úplný, existuje tedy limita posloupnosti $\{u_{\vec{j}}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ v \mathbb{R}^d . Označme $u_{\vec{j}}$ tuto limitu. Nyní definujeme prvek $\mathbf{u} = \{u_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m}$. Stačí dokázat, že takto definovaný prvek je z $\mathbb{B}(d)$. Protože posloupnost $\{\mathbf{u}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je cauchyovská a $\|\mathbf{u}^{n_0}\| \leq M_o$, platí pro všechna $n > n_o$

$$\|\mathbf{u}^n\| \leq \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n_0}\| + \|\mathbf{u}^{n_0}\| < \varepsilon_o + M_o$$

a posloupnost $\{\mathbf{u}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je tedy omezená, t.j.

$$\exists M \in \mathbb{R}; \|\mathbf{u}^n\| \leq M \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Platí

$$|u_{\vec{j}}^n| < \|\mathbf{u}^n\| \leq M \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ a } \vec{j} \in \mathbb{Z}^m,$$

protože $u_{\vec{j}}^n \rightarrow u_{\vec{j}}$ pro $n \rightarrow \infty$ platí

$$|u_{\vec{j}}| \leq M \quad \text{pro všechna } \vec{j} \in \mathbb{Z}^m$$

a tak dostáváme

$$\sup_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m} |u_{\vec{j}}| \leq M.$$

Vektor \mathbf{u} je tedy z $\mathbb{B}(d)$, a prostor $\mathbb{B}(d)$ je proto úplný. ■

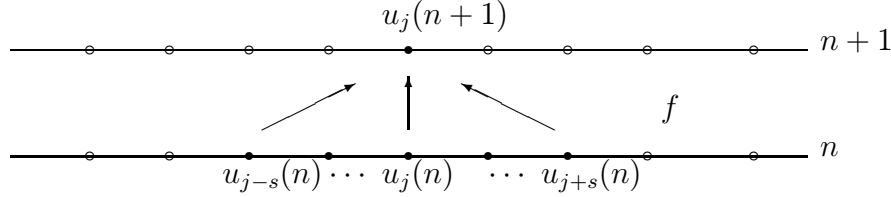
$\mathbb{B}(d)$ je tedy Banachův prostor, který hraje roli fázového prostoru. V případě $d = 1$ budeme psát \mathbb{B} místo $\mathbb{B}(1)$.

Uvažujme zobrazení $\mathcal{F} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$ určené vztahem

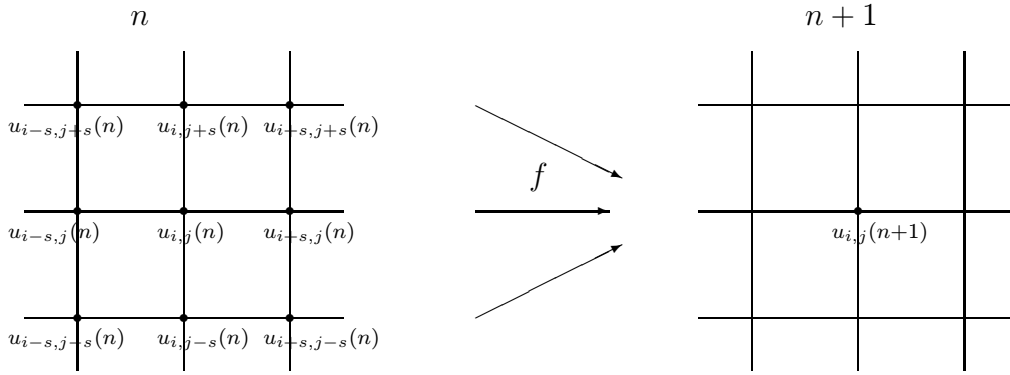
$$(\mathcal{F}\mathbf{u})_{\vec{j}} = f(\{u_{\vec{j}}\}^s), \quad (4)$$

kde $\{u_{\vec{j}}\}^s = \{u_{\vec{k}}, |\vec{k} - \vec{j}| \leq s\}$, $|\vec{k} - \vec{j}| = \max\{|k_1 - j_1|, \dots, |k_m - j_m|\}$, pro $\vec{k} = (k_1, \dots, k_m)$, $\vec{j} = (j_1, \dots, j_m)$, $s \geq 1$ je přirozené číslo a $f : \mathbb{R}^{d(2s+1)^m} \rightarrow \mathbb{R}^d$ je diferencovatelné zobrazení třídy C^1 . Pro názornost si zobrazení f ukážeme na obrázku.

a) Jednorozměrná mřížka



b) Dvojrzměrná mřížka



Abychom mohli definovat pomocí zobrazení \mathcal{F} diskrétní dynamický system vztahem

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathcal{F}(\mathbf{u}(n)),$$

musí platit podmínka

$$\mathcal{F}(\mathbb{B}(d)) \subset \mathbb{B}(d). \quad (5)$$

Lemma 3.2 Jestliže zobrazení $f : \mathbb{R}^{d(2s+1)^m} \rightarrow \mathbb{R}^d$ je diferencovatelné zobrazení třídy C^1 a platí $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < M$, pro $i = 1, \dots, d(2s+1)^m$, potom pro zobrazení \mathcal{F} definované vztahem (4) platí vztah (5).

Důkaz:

Uvažujme nejprve $d = 1$ a $m = 1$. Nechť $\mathbf{u} \in \mathbb{B}$, stačí dokázat, že $\mathcal{F}(\mathbf{u}) \in \mathbb{B}$, tedy,

že $\|\mathcal{F}(\mathbf{u})\| < \infty$. Označme $\vec{u} = (u_{j-s}, \dots, u_{j+s})$ a $\vec{v} = (v_{j-s}, \dots, v_{j+s})$. Použijeme-li větu o přírůstku funkce pro funkce více proměnných na funkci f dostáváme

$$|(\mathcal{F}(\mathbf{u}))_j - (\mathcal{F}(\mathbf{v}))_j| = |f(\vec{u}) - f(\vec{v})| = \left| \sum_{i=-s}^s \frac{\partial f(\vec{\theta})}{\partial u_{j-i}} (\vec{u} - \vec{v})_i \right|,$$

kde $\vec{\theta} = \vec{u} + \theta(\vec{v} - \vec{u})$ a $0 < \theta < 1$. Z předpokladů lemma plyne

$$\left| \sum_{i=-s}^s \frac{\partial f(\vec{\theta})}{\partial u_{j-i}} (\vec{u} - \vec{v})_i \right| < (2s+1)M\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

a platí tedy

$$|(\mathcal{F}(\mathbf{u}))_j - (\mathcal{F}(\mathbf{v}))_j| < (2s+1)M\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (6)$$

Využijeme-li tento vztah, dostáváme

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\mathbf{u})\| &\leq \|\mathcal{F}(\mathbf{u}) - \mathcal{F}(\mathbf{0})\| + \|\mathcal{F}(\mathbf{0})\| = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |(\mathcal{F}(\mathbf{u}))_j - (\mathcal{F}(\mathbf{0}))_j| + \|\mathcal{F}(\mathbf{0})\| \\ &\leq (2s+1)M\|\mathbf{u}\| + \|\mathcal{F}(\mathbf{0})\| < \infty. \end{aligned}$$

Pro $m > 1$ projde důkaz stejně, jen funkce f je funkcí $(2s+1)^m$ proměnných, tedy vztah (6) bude mít tvar

$$|(\mathcal{F}(\mathbf{u}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{v}))_{\vec{j}}| < (2s+1)^m M\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

V případě $d > 1$ dostáváme (použijeme-li euklidovskou normu)

$$|(\mathcal{F}(\mathbf{u}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{v}))_{\vec{j}}|^2 = \sum_{i=1}^d |(\mathcal{F}(\mathbf{u}))_{\vec{j}}^i - (\mathcal{F}(\mathbf{v}))_{\vec{j}}^i|^2 < d(2s+1)^m M\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2,$$

kde $(\mathcal{F}(\mathbf{v}))_{\vec{j}}^i$ značí i -tou složku prvku $(\mathcal{F}(\mathbf{v}))_{\vec{j}} \in \mathbb{R}^d$, a lemma platí také. ■

Předpoklady Lemma 3.2 jsou pro platnost podmínky (5) zbytečně silné. V případě prostoru $\mathbb{B}(d)$ stačí podmínka, aby zobrazení f zobrazovalo omezenou množinu v $\mathbb{R}^{d(2s+1)^m}$ na omezenou množinu v \mathbb{R}^d .

Diskrétní dynamický systém

$$(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}(d))_{n \in \mathbb{Z}^+} \quad (7)$$

se nazývá mřížkový dynamický systém (LDS-Lattice dynamical system) na fázovém prostoru $\mathbb{B}(d)$, generovaný funkcí f . Někdy budeme používat pro označení mřížkového dynamického systému také vztah

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathcal{F}(\mathbf{u}(n)). \quad (8)$$

Nyní se můžeme vrátit k motivaci LDS. Rovnice (3) definuje mřížkový dynamický systém, kde $d = 1$, $m = 1$, $s = 1$ a funkce $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je definována vztahem

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\tau}{h^2}(x_3 - x_1) + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right)x_2 + \tau g\left(x_2, \frac{x_3 - x_2}{h}\right).$$

3.3 Fréchetova derivace

V tomto oddíle si definujeme stacionární řešení, prostorově homogenní stacionární řešení a odvodíme si tvar Fréchetovy derivace vyčíslené ve stacionárním řešení mřížkového dynamického systému.

Definice 3.1 Pevný bod $\mathbf{u}^* = \{u_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}^m}$ zobrazení \mathcal{F} , t.j. bod, pro který platí

$$\mathcal{F}\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*$$

nazýváme stacionárním řešením mřížkového dynamického systému $(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}(d))_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Platí-li navíc $u_j^* = u^0$ pro všechny $j \in \mathbb{Z}^m$ mluvíme o prostorově homogenním stacionárním řešení.

Je známo, že stabilita stacionárního řešení \mathbf{u}^* je určena spektrem Fréchetovy derivace zobrazení \mathcal{F} v bodě \mathbf{u}^* (viz věta 2.5). Předpokládejme, že $f \in C^1(\mathbb{R}^{d(2s+1)^m}, \mathbb{R}^d)$.

Věta 3.1 Fréchetova derivace $\mathcal{A} = d\mathcal{F}|_{\mathbf{u}^*} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$ je určena vztahem

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{l}-\vec{j}| \leq s} A_{\vec{l}}^{\vec{j}} u_{\vec{l}}, \quad \text{kde } A_{\vec{l}}^{\vec{j}} = \frac{\partial f(\{u_j^*\}^s)}{\partial u_{\vec{l}}}. \quad (9)$$

$A_{\vec{l}}^{\vec{j}}$ jsou čtvercové matice řádu d .

Důkaz:

Stačí dokázat, že

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}) - \mathcal{F}(\mathbf{u}^*) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (10)$$

Zde předpokládáme, že norma $\|\cdot\|$ je norma v $\mathbb{B}(d)$. Normu v \mathbb{R}^d budeme značit $|\cdot|$. Pro názornost ukážeme důkaz nejdříve pro $d = 1$. V tomto případě je

$$f : \mathbb{R}^{(2s+1)^m} \rightarrow \mathbb{R}$$

a $A_{\vec{l}}^{\vec{j}}$ jsou reálná čísla. Protože $f \in C^1(\mathbb{R}^{(2s+1)^m}, \mathbb{R})$, pak pro každé $\vec{j} \in \mathbb{Z}^m$ existuje gradient $f'(\{u_j^*\}^s)$

$$f'(\{u_j^*\}^s) = \left\{ \frac{\partial f(\{u_j^*\}^s)}{\partial u_{\vec{l}}} \right\}_{|\vec{l}-\vec{j}| \leq s}.$$

Můžeme tedy psát

$$\lim_{\{h_{\vec{j}}\}^s \rightarrow \{0\}^s} \frac{\left| f(\{u_{\vec{j}}^* + h\}^s) - f(\{u_{\vec{j}}^*\}^s) - \sum_{|\vec{k}-\vec{j}| \leq s} \frac{\partial f(\{u_{\vec{j}}^*\}^s)}{\partial u_{\vec{k}}} h_{\vec{k}} \right|}{|\{h_{\vec{j}}\}^s|} = 0,$$

tedy $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\vec{j}} > 0 \quad \forall \|\{h_{\vec{j}}\}^s\| < \delta_{\vec{j}}$

$$\frac{\left| f(\{u_{\vec{j}}^* + h\}^s) - f(\{u_{\vec{j}}^*\}^s) - \sum_{|\vec{k}-\vec{j}| \leq s} \frac{\partial f(\{u_{\vec{j}}^*\}^s)}{\partial u_{\vec{k}}} h_{\vec{k}} \right|}{|\{h_{\vec{j}}\}^s|} < \varepsilon.$$

Přepíšeme-li tuto nerovnost pomocí zobrazení \mathcal{F} , dostáváme

$$\frac{\left| (\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}} \right|}{|\{h_{\vec{j}}\}^s|} < \varepsilon.$$

Zvolme $0 < \delta_1 < \delta_{\vec{j}}$ pro všechna $\vec{j} \in \mathbb{Z}^m$ a $\delta_o = \frac{\delta_1}{(2s+1)^m}$. Protože platí vztah

$$(2s+1)^m \|\mathbf{h}\| > |\{h_{\vec{j}}\}^s|,$$

potom pro $\|\mathbf{h}\| < \delta_o$ můžeme psát $|\{h_{\vec{j}}\}^s| < (2s+1)^m \delta_o = \delta_1 < \delta_{\vec{j}}$. Protože

$$\frac{\left| (\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}} \right|}{\|\mathbf{h}\|} < (2s+1)^m \frac{\left| (\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}} \right|}{|\{h_{\vec{j}}\}^s|},$$

$$\frac{\left| (\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}} \right|}{\|\mathbf{h}\|} < (2s+1)^m \varepsilon = \varepsilon_o.$$

Pro supremum dostaneme

$$\sup_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m} \frac{\left| (\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}} \right|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \varepsilon_o.$$

A tedy $\forall \varepsilon_o > 0 \quad \exists \delta_o > 0 \quad \forall \|\mathbf{h}\| < \delta_o$

$$\frac{\|\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}) - \mathcal{F}(\mathbf{u}^*) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \varepsilon_o.$$

Platí tedy vztah (10).

Nyní provedeme důkaz pro $d > 1$. V tomto případě je

$$f : \mathbb{R}^{d(2s+1)^m} \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

$f = (f_1, \dots, f_d)$ a $A_{\vec{l}}^{\vec{j}}$ jsou čtvercové matice řádu d . Protože $f \in C^1(\mathbb{R}^{d(2s+1)^m}, \mathbb{R}^d)$, pak pro každé $i = 1, \dots, d$ a každé $\vec{j} \in \mathbb{Z}^m$ existuje gradient $f'_i(\{u_{\vec{j}}^*\}^s)$

$$f'_i(\{u_{\vec{j}}^*\}^s) = \left\{ \frac{\partial f_i(\{u_{\vec{j}}^*\}^s)}{\partial u_{\vec{l}}} \right\}_{|\vec{l}-\vec{j}| \leq s}$$

a

$$\lim_{\{h_{\vec{j}}\}^s \rightarrow \{0\}^s} \frac{\left| f_i(\{u_{\vec{j}}^* + h\}^s) - f_i(\{u_{\vec{j}}^*\}^s) - \sum_{|\vec{k}-\vec{j}| \leq s} \frac{\partial f_i(\{u_{\vec{j}}^*\}^s)}{\partial u_{\vec{k}}} h_{\vec{k}} \right|}{|\{h_{\vec{j}}\}^s|} = 0,$$

tedy $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\vec{j}} > 0 \quad \forall |\{h_{\vec{j}}\}^s| < \delta_{\vec{j}} \quad (\delta_{\vec{j}} = \min_{i=1, \dots, d} \delta_{\vec{j}}^i)$

$$\frac{\left| f_i(\{u_{\vec{j}}^* + h\}^s) - f_i(\{u_{\vec{j}}^*\}^s) - \sum_{|\vec{k}-\vec{j}| \leq s} \frac{\partial f_i(\{u_{\vec{j}}^*\}^s)}{\partial u_{\vec{k}}} h_{\vec{k}} \right|}{|\{h_{\vec{j}}\}^s|} < \varepsilon.$$

Nyní můžeme psát, že $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_{\vec{j}} > 0 \quad \forall |\{h_{\vec{j}}\}^s| < \delta_{\vec{j}}$

$$\frac{\left| f(\{u_{\vec{j}}^* + h\}^s) - f(\{u_{\vec{j}}^*\}^s) - \sum_{|\vec{k}-\vec{j}| \leq s} \frac{\partial f(\{u_{\vec{j}}^*\}^s)}{\partial u_{\vec{k}}} h_{\vec{k}} \right|}{|\{h_{\vec{j}}\}^s|} < d\varepsilon.$$

Přepíšeme-li tuto nerovnost pomocí zobrazení \mathcal{F} , dostáváme

$$\frac{|(\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}}|}{|\{h_{\vec{j}}\}^s|} < d\varepsilon.$$

Zvolme $0 < \delta_1 < \delta_{\vec{j}}$ pro všechna $\vec{j} \in \mathbb{Z}^m$ a $\delta_o = \frac{\delta_1}{(2s+1)^m}$. Protože platí vztah

$$(2s+1)^m \|\mathbf{h}\| > |\{h_{\vec{j}}\}^s|,$$

potom pro $\|\mathbf{h}\| < \delta_o$ můžeme psát $|\{h_{\vec{j}}\}^s| < (2s+1)^m \delta_o = \delta_1 < \delta_{\vec{j}}$. Protože

$$\frac{|(\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}}|}{\|\mathbf{h}\|} < (2s+1)^m \frac{|(\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}}|}{|\{h_{\vec{j}}\}^s|},$$

$$\frac{|(\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}}|}{\|\mathbf{h}\|} < (2s+1)^m d\varepsilon = \varepsilon_o.$$

Pro supremum platí

$$\sup_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m} \frac{|(\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}))_{\vec{j}} - (\mathcal{F}(\mathbf{u}^*))_{\vec{j}} - (\mathcal{A}\mathbf{h})_{\vec{j}}|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \varepsilon_o.$$

A tedy $\forall \varepsilon_o > 0 \quad \exists \delta_o > 0 \quad \forall \|\mathbf{h}\| < \delta_o$

$$\frac{\|\mathcal{F}(\mathbf{u}^* + \mathbf{h}) - \mathcal{F}(\mathbf{u}^*) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \varepsilon_o.$$

A opět platí vztah (10). ■

Pro zobrazení $\mathcal{F} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ je $A_{\vec{l}}^{\vec{j}}$ reálné číslo, pro $\mathcal{F} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$ ($d > 1$) je $A_{\vec{l}}^{\vec{j}}$ čtvercová matice řádu d . V případě, že $\mathbf{u}^* = \{u_{\vec{j}}^*\}_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m}$ je prostorově homogenní řešení, čísla (matice) $A_{\vec{l}}^{\vec{j}}$ závisí pouze na hodnotách $(\vec{l} - \vec{j})$ a mohou být různá od 0 pouze pro $|\vec{l} - \vec{j}| \leq s$. Označíme-li $\vec{l} - \vec{j} = \vec{k}$, je operátor \mathcal{A} určen $(2s + 1)^m$ čísly (maticemi) $A_{\vec{k}}$, $|\vec{k}| \leq s$ a má tvar

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{k}| \leq s} A_{\vec{k}} u_{\vec{j} + \vec{k}} \quad (11)$$

Pro názornost si můžeme ukázat, jak vypadá operátor \mathcal{A} pro $s = 1$ a $m = 1$. Operátor \mathcal{A} můžeme v tomto případě reprezentovat třídiagonální nekonečnou maticí

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \cdots & 0 & A_{-1} & A_0 & A_1 & 0 & \cdots & & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & A_{-1} & A_0 & A_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & & \cdots & 0 & A_{-1} & A_0 & A_1 & 0 & \cdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Pro obecné s má matice $2s + 1$ diagonál.

4 Stabilita prostorově homogenních řešení LDS s jednorozměrnou mřížkou

V této kapitole určíme stabilitu některých stacionárních řešení LDS s jednorozměrnou mřížkou, t.j. zobrazení f ve vztahu (4) je zobrazení z $\mathbb{R}^{d(2s+1)}$ do \mathbb{R}^d pro $d > 1$, resp. z $\mathbb{R}^{(2s+1)}$ do \mathbb{R} pro $d=1$.

Nechť stacionární řešení \mathbf{u}^* LDS $(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}(d))_{n \in \mathbb{Z}^+}$ je prostorově homogenní, t.j.

$$u_j^* = u^0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

V tomto případě je Fréchetova derivace zobrazení \mathcal{F} daná vztahem (11) pro jednorozměrné indexy, tedy

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_j = \sum_{k=-s}^s A_k u_{j+k}$$

Víme (viz věta 2.5), že prostorově homogenní stacionární řešení \mathbf{u}^* je stabilní, jestliže spektrum $\sigma(\mathcal{A})$ leží v jednotkovém otevřeném kruhu Gaussovy roviny o středu 0. V oddíle 4.1 (věta 4.2 pro $d = 1$) a 4.3 (věta 4.6 pro $d > 1$) určíme spektrum tohoto operátoru.

4.1 Jednodimenzionální LDS na \mathbb{B}

V tomto oddíle předpokládáme komplexní Banachův prostor

$$\mathbb{B} = \{\mathbf{u} = \{u_j\}_{j \in \mathbb{Z}} ; u_j \in \mathbb{C}, \sup\{|u_j|; j \in \mathbb{Z}\} < \infty\}$$

se supremovou normou a lineární spojitý operátor $\mathcal{A} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ daný vztahem

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_j = \sum_{k=-s}^s a_k u_{j+k}, \quad (12)$$

kde a_{-s}, \dots, a_s jsou daná reálná čísla.

Poznamenejme, že prostorově homogenní stacionární řešení je stabilní jestliže

$$\sum_{k=-s}^s |a_k| < 1,$$

protože $r(\mathcal{A}) \leq \|\mathcal{A}\| = \sum_{k=-s}^s |a_k|$, jak uvidíme v následující větě a zároveň nám tato věta dává případ, kdy spektrální poloměr operátoru \mathcal{A} se rovná přímo normě operátoru \mathcal{A} .

Věta 4.1 *Nechť operátor $\mathcal{A} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ je dán vztahem (12), kde a_k , $-s \leq k \leq s$ jsou reálná čísla splňující jednu z následujících čtyř podmínek*

- (a) $a_k \geq 0$ pro $-s \leq k \leq s$,
- (b) $a_k \leq 0$ pro $-s \leq k \leq s$,
- (c) $a_{-s+2k} \geq 0$ pro $0 \leq k \leq s$ a $a_{-s+2k+1} \leq 0$ pro $0 \leq k \leq s-1$,
- (d) $a_{-s+2k} \leq 0$ pro $0 \leq k \leq s$ a $a_{-s+2k+1} \geq 0$ pro $0 \leq k \leq s-1$.

Potom pro spektrální poloměr platí

$$r(\mathcal{A}) = \sum_{k=-s}^s |a_k|.$$

Důkaz:

Skutečně

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\| &= \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathcal{A}(\mathbf{x})\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \left(\sup_{j \in \mathbb{Z}} |(\mathcal{A}(\mathbf{x}))_j| \right) \\ &= \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \left(\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k=-s}^s a_k x_{j+k} \right| \right) = \sum_{k=-s}^s |a_k|. \end{aligned}$$

A tedy $r(\mathcal{A}) \leq \sum_{k=-s}^s |a_k|$. Na druhou stranu podmínky a) - d) ve skutečnosti znamenají, že a_k mají stejné znaménko nebo střídavá znaménka. Zvolíme-li vhodný vlastní vektor $\mathbf{x} = (\dots, 1, 1, 1, \dots)$ (resp. $\mathbf{x} = (\dots, -1, -1, -1, \dots)$) v případě a) (resp. b)) a vlastní vektor $\mathbf{x} = (\dots, -1, 1, -1, \dots)$ v případě c) a d), dostáváme vlastní číslo $|\lambda| = \sum_{k=-s}^s |a_k|$. ■

Celé spektrum operátoru \mathcal{A} určuje následující věta.

Věta 4.2 *Pro spektrum operátoru \mathcal{A} platí*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \sum_{k=-s}^s a_k e^{ik\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Navíc, celé spektrum $\sigma(\mathcal{A})$ je tvořeno vlastními hodnotami operátoru \mathcal{A} .

Nejdříve, dokážeme Větu 4.2 pro případ operátoru $\mathcal{S} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$,

$$(\mathcal{S}\mathbf{u})_j = u_{j+1},$$

t. j. ve vztahu (12) je nenulové pouze číslo $a_1 = 1$. Operátor \mathcal{S} budeme nazývat levý posun.

Lemma 4.1 *Spektrum operátoru \mathcal{S} je dáno vztahem*

$$\sigma(\mathcal{S}) = \{e^{i\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi]\} .$$

Důkaz:

a) Položíme-li $\lambda = e^{i\varphi}$ pro $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $u_n = e^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{Z}$, potom λ a $\mathbf{u} = \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ splňuje rovnici

$$u_{n+1} - \lambda u_n = 0 \text{ for } n \in \mathbb{Z} .$$

A tedy λ je vlastní hodnota operátoru \mathcal{S} .

b) Necht' $\lambda \neq e^{i\varphi}$ pro všechna $\varphi \in [0, 2\pi]$. Ukážeme, že operátor $(\mathcal{S} - \lambda\mathcal{I})$ je prostý a na. A tedy $\lambda \notin \sigma(\mathcal{S})$. Pro $\mathbf{y} \in \mathbb{B}$ sestrojíme $\mathbf{x} \in \mathbb{B}$ takový, že $\mathbf{y} = (\mathcal{S} - \lambda\mathcal{I})\mathbf{x}$, t.j.

$$y_n = x_{n+1} - \lambda x_n, \quad n \in \mathbb{Z} . \quad (13)$$

Rozlišíme tři případy.

i. $\lambda = 0$.

Potom skutečně $x_{n+1} = y_n$, $n \in \mathbb{Z}$, splňuje (13).

ii. $0 < |\lambda| < 1$.

Pro $n \in \mathbb{Z}$ položme $x_n = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j y_{n-j-1}$. Potom

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \lambda x_n &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j y_{n-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{j+1} y_{n-j-1} \\ &= y_n + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j y_{n-j} - \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{j+1} y_{n-j-1} = y_n . \end{aligned}$$

iii. $|\lambda| > 1$.

Pro $n \in \mathbb{Z}$ položme $x_n = -\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{j+1} y_{n+j}$. Potom

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \lambda x_n &= -\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{j+1} y_{n+j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{j+1} y_{n+j} = \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{j+1} y_{n+j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^j y_{n+j} + y_n = y_n . \end{aligned}$$

■

Použijeme-li větu o obrazu spektra, je důkaz jednoduchý. Protože $\lambda = 0$ není ve spektru operátoru \mathcal{S} a spektrum je uzavřená množina, existuje okolí bodu 0, které

celé neleží v $\sigma(\mathcal{S})$. Funkce $\frac{1}{z}$ je tedy analytická na okolí $\sigma(\mathcal{S})$. Je-li $\lambda \in \sigma(\mathcal{S})$ potom $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(\mathcal{S}^{-1})$. Protože $\|\mathcal{S}\| = \|\mathcal{S}^{-1}\| = 1$ platí pro $\lambda \in \sigma(\mathcal{S})$

$$|\lambda| \leq 1 \text{ a } \left| \frac{1}{\lambda} \right| \leq 1.$$

Platí tedy $|\lambda| = 1$, a to nastane pouze tehdy, když $\lambda = e^{i\varphi}$ pro nějaké $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Důkaz věty 4.2:

Je hned vidět, že

$$\mathcal{A} = \sum_{k=-s}^s a_k \mathcal{S}^k,$$

kde \mathcal{S}^{-1} je inverzní operátor k \mathcal{S} . Protože funkce $g(z) = \sum_{k=-s}^s a_k z^k$ je analytická na množině $\{z \in \mathbb{C}; z \neq 0\}$, Věta 4.2 plyne přímo z Věty 2.2 (věta o obrazu spektra). ■

Nyní můžeme vyslovit větu o stabilitě prostorově homogenního stacionárního řešení LDS $(\mathcal{F}^n, \mathbb{B})_{n \in \mathbb{Z}^+}$.

Věta 4.3 *Nechť \mathcal{A} Fréchetova derivace zobrazení \mathcal{F} v bodě $\mathbf{u}^* = \{u^0\}_{j \in \mathbb{Z}}$, tedy*

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_j = \sum_{k=-s}^s a_k u_{j+k}, \quad a_k = \frac{\partial f(\{u^0\}^s)}{\partial u_k} \text{ pro } k = -s, \dots, s.$$

Potom prostorově homogenní stacionární řešení \mathbf{u}^ LDS $(\mathcal{F}^n, \mathbb{B})_{n \in \mathbb{Z}^+}$ je exponenciálně stabilní jestliže*

$$\left| \sum_{k=-s}^s a_k e^{ik\varphi} \right| < 1 \text{ pro } \varphi \in [0, 2\pi].$$

Důkaz plyne ihned z věty 4.2 a 2.5.

Použití věty 4.2 si ukážeme na následujícím příkladu.

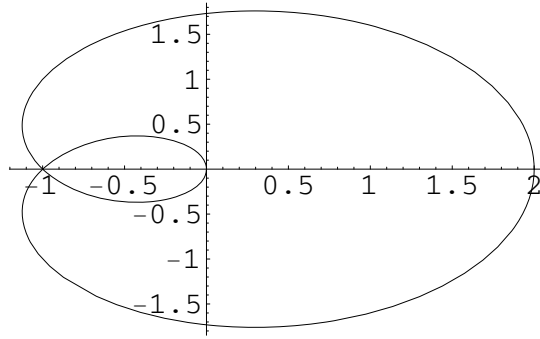
Příklad 1 Nechť operátor $\mathcal{A} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ je dán vztahem

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_j = u_{j+1} + u_{j+2}, \tag{14}$$

t.j. $\mathcal{A} = \mathcal{S} + \mathcal{S}^2$. Potom pro spektrum operátoru \mathcal{A} platí

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{e^{i\varphi} + e^{i2\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi]\}. \tag{15}$$

Spektrum je ukázáno na obrázku 1.



Obrázek 1:

4.2 Maticové operátory

Dříve než vyslovíme větu o stabilitě prostorově homogenních řešení pro LDS na $\mathbb{B}(d)$ uvedeme některé vlastnosti maticových operátorů.

V tomto odstavci uvažujme komplexní Banachův prostor X a lineární spojité operátor $\mathcal{T} : X \rightarrow X$. Zvolme pevné $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$X^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top ; x_i \in X, i = 1, \dots, n\}$$

je opět Banachův prostor s normou

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2}.$$

Pro komplexní matici $A = (a_{ij})$ řádu n , označme $A\mathcal{T}$ lineární spojité operátor na X^n definovaný vztahem

$$A\mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathcal{T}(x_1) \\ \vdots \\ \mathcal{T}(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathcal{T}(x_1) + \dots + a_{1n}\mathcal{T}(x_n) \\ \vdots \\ a_{n1}\mathcal{T}(x_1) + \dots + a_{nn}\mathcal{T}(x_n) \end{pmatrix}$$

pro $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X^n$. Tudíž, $A\mathcal{T}$ je maticový operátor

$$A\mathcal{T} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathcal{T}, & \dots, & a_{1n}\mathcal{T} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\mathcal{T}, & \dots, & a_{nn}\mathcal{T} \end{bmatrix}.$$

Poznámka : Pro maticový operátor $\mathcal{M} : X^n \rightarrow X^n$, $\mathcal{M} = \{\mathcal{A}_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, kde \mathcal{A}_{ij} vzájemně komutují, definujeme determinant maticového operátoru $\det(\mathcal{M})$ analogicky jako pro číselné matice, kde násobení je nahrazeno skládáním operátorů.

Nyní, můžeme formulovat větu, kterou budeme potřebovat.

Věta 4.4 *Nechť $\mathcal{T} : X \rightarrow X$ je vzájemně jednoznačný lineární spojité operátor (\mathcal{T}^{-1} existuje a je spojité, t.j. $0 \notin \sigma(\mathcal{T})$, viz Věta 2.1) a nechť A_j jsou komplexní matice řádu n , $j = -s, \dots, s$. Nechť $\mathcal{L} : X^n \rightarrow X^n$ je dán vztahem*

$$\mathcal{L} = \sum_{j=-s}^s A_j \mathcal{T}^j . \quad (16)$$

Potom

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \det(\sum_{j=-s}^s \alpha^j A_j - \lambda E) = 0 \text{ pro nějaké } \alpha \in \sigma(\mathcal{T}) \} .$$

(Zde E označuje jednotkovou matici řádu n .)

Poznámka : Můžeme formulovat i obecnější větu 4.4, kde v definici operátoru \mathcal{L} ve výrazu (16) uvažujeme i nekonečnou sumu.

Věta 4.4 snadno plyne z následující věty (viz [14]).

Věta 4.5 *Nechť X je a Banachův prostor, $\mathcal{A}_{ij} : X \rightarrow X$ jsou lineární spojité operátory, $i, j = 1, \dots, n$, takové, že všechny komutují, t.j.*

$$\mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{lk} = \mathcal{A}_{lk} \mathcal{A}_{ij} \text{ pro všechna } i, j, k, l \in \{1, \dots, n\} .$$

Nechť

$$\mathcal{M} : X^n \rightarrow X^n , \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{n1} & \dots & \mathcal{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

je lineární spojité operátor daný vztahem

$$(\mathcal{M}(\mathbf{x}))_i = \sum_{j=1}^n \mathcal{A}_{ij}(x_j) \text{ pro } i = 1, \dots, n \text{ and } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in X^n .$$

Potom \mathcal{M} je vzájemně jednoznačný právě tehdy, když $\det(\mathcal{M}) : X \rightarrow X$ je vzájemně jednoznačný.

Důkaz věty 4.4:

1. Nechť $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$, t.j.

$$\mathcal{L} - \lambda \mathcal{I}_n = \sum_{j=-s}^s A_j \mathcal{T}^j - \lambda E \mathcal{I}$$

není vzájemně jednoznačný (zde \mathcal{I} značí identický operátor na X a \mathcal{I}_n identický operátor na X^n). Potom podle Věty 4.5, není operátor

$$\det\left(\sum_{j=-s}^s A_j \mathcal{T}^j - \lambda E \mathcal{I}\right)$$

vzájemně jednoznačný, a tedy

$$0 \in \sigma\left(\det\left(\sum_{j=-s}^s A_j \mathcal{T}^j - \lambda E \mathcal{I}\right)\right).$$

Ale komplexní funkce

$$f(z) = \det\left(\sum_{j=-s}^s z^j A_j - \lambda E\right)$$

je analytická na množině $\{z \in \mathbb{C} ; z \neq 0\}$, a tedy podle [11, Theorem 11] $0 = f(\alpha)$ pro nějaké $\alpha \in \sigma(\mathcal{T})$.

2. Opačně, necht' λ je komplexní číslo takové, že

$$\det\left(\sum_{j=-s}^s \alpha^j A_j - \lambda E\right) = 0 \quad \text{pro nějaké } \alpha \in \sigma(\mathcal{T}).$$

Potom opět podle [11, Theorem 11](věta 2.2) operátor

$$\det\left(\sum_{j=-s}^s A_j \mathcal{T}^j - \lambda E \mathcal{I}\right)$$

není vzájemně jednoznačný a podle Věty 4.5 není vzájemně jednoznačný operátor

$$\sum_{j=-s}^s A_j \mathcal{T}^j - \lambda \mathcal{I} E.$$

To znamená $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$. ■

Důkaz věty 4.5:

Tuto větu dokázal již R. Harte v roce 1988 (viz [14]), náš důkaz je ale odlišný, proto jej zde uvádíme. V důkazu jsme použili podobný postup jako P. R. Halmos v [13], kde je věta dokázána pro $n = 2$ v Hilbertově prostoru X .

1. Předpokládejme, že $(\det \mathcal{M})$ je vzájemně jednoznačný a položme $\Delta = (\det \mathcal{M})^{-1}$. Navíc označme \mathcal{S}_{ij} algebraický doplněk k \mathcal{A}_{ij} (determinant k maticovému operátoru (opatřený znaménkem $(-1)^{i+j}$), který dostaneme vynecháním i -tého

řádku a j -tého sloupce). Potom

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathcal{S}_{11} & \dots & \Delta\mathcal{S}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta\mathcal{S}_{n1} & \dots & \Delta\mathcal{S}_{nn} \end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{n1} & \dots & \mathcal{A}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{I} \end{bmatrix} = \mathcal{I}_n,$$

a

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{n1} & \dots & \mathcal{A}_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathcal{S}_{11} & \dots & \Delta\mathcal{S}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta\mathcal{S}_{n1} & \dots & \Delta\mathcal{S}_{nn} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{I} \end{bmatrix} = \mathcal{I}_n.$$

A tedy \mathcal{M} je vzájemně jednoznačný. Použili jsme fakt, že Δ komutuje s \mathcal{A}_{ij} , což plyne přímo ze skutečnosti, že $(\det \mathcal{M})$ komutuje s \mathcal{A}_{ij} a $\mathcal{I} = (\det \mathcal{M})\Delta = \Delta(\det \mathcal{M})$.

$$\Delta\mathcal{A}_{ij} = \Delta\mathcal{A}_{ij}\mathcal{I} = \Delta\mathcal{A}_{ij}(\det \mathcal{M})\Delta = \Delta(\det \mathcal{M})\mathcal{A}_{ij}\Delta = \mathcal{I}\mathcal{A}_{ij}\Delta = \mathcal{A}_{ij}\Delta$$

2. Předpokládejme, že $\mathcal{M} : X^n \rightarrow X^n$ je vzájemně jednoznačný.

(a) Nejdříve dokážeme, že $\det(\mathcal{M})$ má inverzní operátor.

Pro $I, J \subseteq \{1, \dots, n\} = N$, $|I| = |J|$ (zde $|I|$ značí mohutnost množiny I), označme $\mathcal{M}_{I,J} : X \rightarrow X$ minor \mathcal{M} sestávající z řádků s indexem z množiny I sloupci z množiny J . Přesněji, pro $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ a $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n$,

$$\mathcal{M}_{I,J} = \det \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{i_1 j_1} & \dots & \mathcal{A}_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{i_k j_1} & \dots & \mathcal{A}_{i_k j_k} \end{bmatrix}.$$

Indukcí ukážeme, že pro $k = 1, \dots, n$ existuje číslo $\alpha_k > 0$ takové, že

$$\sum_{\substack{I \subseteq N \\ |I|=k}} \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=k}} \|\mathcal{M}_{I,J}(x)\|^2 \geq \alpha_k \|x\|^2 \quad (17)$$

pro všechna $x \in X$. Z toho plyne

$$\|\det(\mathcal{M})(x)\|^2 = \|\mathcal{M}_{N,N}(x)\|^2 \geq \alpha_n \|x\|^2$$

a tedy $\det(\mathcal{M})$ má spojitý inverzní operátor (viz Taylor [21] Věta 3.1-B).

Protože $\mathcal{M} : X^n \rightarrow X^n$ je vzájemně jednoznačný, existuje číslo $\alpha > 0$ takové, že

$$\left\| \mathcal{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 \geq \alpha (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2).$$

i. Předpokládejme $k = 1$ a že $x \in X$ je dáno.

Označme $\mathbf{x}_i = (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)^\top \in X^n$, kde x je i -tá souřadnice \mathbf{x}_i . Potom

$$\sum_{i=1}^n \|\mathcal{M}(\mathbf{x}_i)\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \alpha \|x\|^2 = n\alpha \|x\|^2.$$

Na druhou stranu platí

$$\sum_{i=1}^n \|\mathcal{M}(\mathbf{x}_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n (\|\mathcal{A}_{i1}(x)\|^2 + \cdots + \|\mathcal{A}_{in}(x)\|^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|\mathcal{A}_{ij}(x)\|^2.$$

A tedy (17) platí pro $\alpha_1 = n\alpha$.

ii. Nechť $1 < k \leq n$ a předpokládejme, že $\alpha_{k-1} > 0$ splňuje (17). Nechť $x \in X$ je dáno. Pro $I \subseteq N$, $J \subseteq N$, $|I| = k - 1$, $|J| = k$, $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ položme

$$\mathbf{x}_{I,J} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in X^n,$$

kde

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } j \notin J \\ (-1)^l \mathcal{M}_{I, J \setminus \{j\}}(x) & \text{pro } j = j_l \in J \end{cases}$$

Jestliže označíme $\mathcal{M}(\mathbf{x}_{I,J}) = (y_1, \dots, y_n)^\top$, potom

$$y_i = \mathcal{A}_{ij_1} \mathcal{M}_{I, J \setminus \{j_1\}} + \cdots + \mathcal{A}_{ij_k} \mathcal{M}_{I, J \setminus \{j_k\}}.$$

Tudíž,

$$\|y_i\| = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \in I \\ \|\mathcal{M}_{I \cup \{i\}, J}(x)\| & \text{pro } i \notin I. \end{cases}$$

A tedy

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=k}} \sum_{\substack{I \subseteq N \\ |I|=k-1}} \|\mathcal{M}(\mathbf{x}_{I,J})\|^2 &\geq \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=k}} \sum_{\substack{I \subseteq N \\ |I|=k-1}} \alpha \|\mathbf{x}_{I,J}\|^2 \geq \\ &\geq \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=k}} \sum_{\substack{I \subseteq N \\ |I|=k-1}} \alpha \left(\sum_{j \in J} \|\mathcal{M}_{I, J \setminus \{j\}}(x)\|^2 \right) = \\ &= \alpha(n - k + 1) \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=k-1}} \sum_{\substack{I \subseteq N \\ |I|=k-1}} \|\mathcal{M}_{I,J}(x)\|^2 \geq \\ &\geq \alpha(n - k + 1) \alpha_{k-1} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Na druhou stranu

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=k}} \sum_{\substack{I \subseteq N \\ |I|=k-1}} \|\mathcal{M}(\mathbf{x}_{I,J})\|^2 &= \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=k}} \sum_{\substack{I \subseteq N \\ |I|=k-1}} \sum_{i \notin I} \|\mathcal{M}_{I \cup \{i\}, J}(x)\|^2 = \\ &= k \cdot \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=k}} \sum_{\substack{I \subseteq N \\ |I|=k}} \|\mathcal{M}_{I,J}(x)\|^2. \end{aligned}$$

Tudíž $\alpha_k = \frac{\alpha(n-k+1)}{k} \cdot \alpha_{k-1} > 0$ splňuje (17). (Zde bychom měli ukázat, že $\alpha_n = \alpha^n$ je-li $\alpha_1 = n\alpha$.)

- (b) Nakonec dokážem, že $\det(\mathcal{M})$ je operátor „na“ (t.j. $\mathcal{R}(\det(\mathcal{M})) = X$). Jako obvykle je

$$X' = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} ; f \text{ je lineární a spojitý funkcionál} \}$$

duální prostor k X a pro lineární spojitý operátor $\mathcal{L} : X \rightarrow X$, máme lineární spojitý operátor $\mathcal{L}' : X' \rightarrow X'$ definovaný vztahem $(\mathcal{L}'f)(x) = f(\mathcal{L}x)$ for $f \in X'$.

Protože $\mathcal{M} : X^n \rightarrow X^n$ je vzájemně jednoznačný, $\mathcal{M}' : (X^n)' \rightarrow (X^n)'$ je také vzájemně jednoznačný. Definujeme-li lineární spojitý operátor $f : X^n \rightarrow \mathbb{C}$ vztahem $f = (f_1, \dots, f_n)^\top$, $f_i : X \rightarrow \mathbb{C}$ lineární a spojitý pro $i = 1, \dots, n$, kde $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)$, dostáváme $(X^n)' \cong (X')^n$ a platí

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}'f)(x_1, \dots, x_n) &= (f(\mathcal{M}(x_1, \dots, x_n)))^\top = \left(\sum_{i=1}^n \mathcal{A}_{1i}, \dots, \sum_{i=1}^n \mathcal{A}_{ni} \right)^\top = \\ &= \left(\left[\begin{array}{ccc} \mathcal{A}'_{11} & \dots & \mathcal{A}'_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}'_{1n} & \dots & \mathcal{A}'_{nn} \end{array} \right] f \right) (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Můžeme tedy ztotožnit operátor \mathcal{M}' s operátorem

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathcal{A}'_{11} & \dots & \mathcal{A}'_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}'_{1n} & \dots & \mathcal{A}'_{nn} \end{array} \right]$$

na $(X')^n$, který je rovněž vzájemně jednoznačný. Navíc \mathcal{A}'_{ij} komutují s \mathcal{A}'_{lk} stejně tak jako \mathcal{A}_{ij} komutují s \mathcal{A}_{lk} . A tedy, podle části 2a) tohoto

důkazu víme, že

$$\det \begin{bmatrix} \mathcal{A}'_{11} & \cdots & \mathcal{A}'_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}'_{1n} & \cdots & \mathcal{A}'_{nn} \end{bmatrix} = \det(\mathcal{M}')$$

má inverzní operátor. Navíc $\det(\mathcal{M}') = (\det \mathcal{M})'$. A tedy z [21, Chapter 4, Theorem 4.7-C] plyne, že $\det(\mathcal{M})$ je operátor „na“. ■

Abychom mohli použít větu 4.4 pro případ operátoru $\mathcal{A} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$ ztotožníme v následujícím odstavci prostor $\mathbb{B}(d)$ s prostorem $\mathbb{B}^d = \mathbb{B} \times \cdots \times \mathbb{B}$, neboť existuje přirozený izomorfismus

$$\alpha : \mathbb{B}^d \rightarrow \mathbb{B}(d), \quad \alpha((\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^d)) = \mathbf{u} \in \mathbb{B}(d),$$

kde $\mathbf{u}^i = \{u_j^i\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $u_j^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$ a $(\mathbf{u})_j = (u_j^1, \dots, u_j^d) \in \mathbb{R}^d$ (podrobněji je toto vysvětleno pro mřížku \mathbb{Z}^m v Kapitole 6 na straně 41).

4.3 Jednodimenzionální LDS na $\mathbb{B}(d)$

V tomto odstavci použijeme Větu 4.4 k určení spektra operátoru $d\mathcal{F}|_{\mathbf{u}^*}$ v případě, kdy \mathbf{u}^* je prostorově homogenní stacionární řešení LDS $(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}(d))_{n \in \mathbb{Z}^+}$. Roli operátoru \mathcal{T} ve Větě 4.4 bude hrát Bernoulliho posun (shift) $\mathcal{S} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ definovaný vztahem

$$(\mathcal{S}(\mathbf{u}))_j = u_{j+1} \quad \text{pro } \mathbf{u} \in \mathbb{B}$$

Spektrum posunu \mathcal{S} nám dává lemma 4.1.

Věta 4.6 *Nechť operátor $\mathcal{A} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$ je dán vztahem*

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_j = \sum_{k=-s}^s A_k u_{j+k} \tag{18}$$

kde A_{-s}, \dots, A_s jsou dané matice řádu d . Potom

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \det \left(\sum_{k=-s}^s e^{i\varphi k} A_k - \lambda E \right) = 0 \text{ pro nějaké } \varphi \in [0, 2\pi] \} .$$

Důkaz:

Protože $\mathcal{A} = \sum_{k=-s}^s A_k \mathcal{S}^k$ kde $\mathcal{S} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ je Bernoulliho posun, tvrzení věty přímo plyne z věty 4.4, kde za \mathcal{T} bereme Bernoulliho posun, a lemmatu 4.1. ■

Poznámka : Podobná verze věty 4.6 byla také dokázána v [9] s použitím Fourierovy transformace.

Větu 4.6 si můžeme ilustrovat na následujícím příkladě.

Příklad 2 Nechť $d = 3$ a $\mathcal{A} : \mathbb{B}(3) \longrightarrow \mathbb{B}(3)$ je daná vztahem

$$(\mathcal{A}u)_j = A_1 u_{j+1} + A_2 u_{j+2} ,$$

kde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

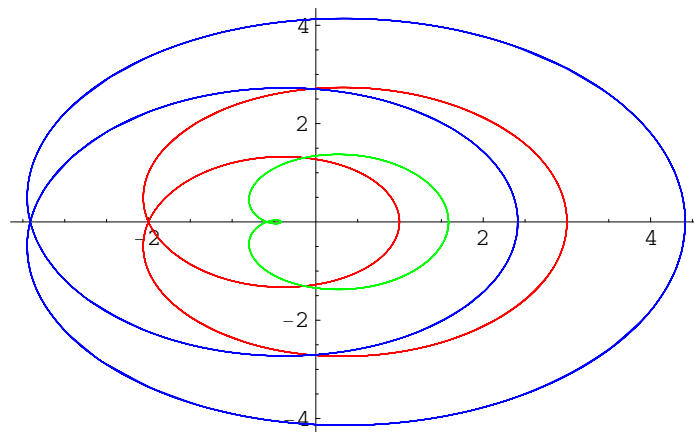
Potom

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \det(e^{-i2\pi\nu} A_1 + e^{-i4\pi\nu} A_2 - \lambda E) = 0, \nu \in \mathbb{R} \} . \quad (19)$$

Rovnice $\det(e^{-i2\pi\nu} A_1 + e^{-i4\pi\nu} A_2 - \lambda E) = 0$ má tři řešení, dostaneme tedy tři křivky v Gaussově rovině

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{-4i\pi\nu} (2 + e^{2i\pi\nu}) \\ \lambda_2 &= e^{-4i\pi\nu} (2 - \sqrt{2} + e^{2i\pi\nu}) \\ \lambda_3 &= e^{-4i\pi\nu} (2 + \sqrt{2} + e^{2i\pi\nu}), \quad \nu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Spektrum je ukázáno na obrázku 2.



Obrázek 2: λ_1 - červená barva, λ_2 - zelená barva, λ_3 - modrá barva

5 Stabilita prostorově periodických řešení LDS s jednorozměrnou mřížkou

V tomto oddíle využijeme výsledků předcházejícího oddílu k určení stability prostorově periodického stacionárního řešení.

Nechť stacionární řešení \mathbf{u}^* mřížkového dynamického systému $(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}(d))_{n \in \mathbb{Z}}$ je prostorově p -periodické, t.j.

$$u_j^* = u_k^* \text{ vždy, když } j \equiv k \pmod{p} .$$

V tomto případě pro matice A_k^j ve vztahu (9) platí

$$A_k^j = A_{k+p}^{j+p}$$

pro všechny $j \in \mathbb{Z}$ a $k = j - s, \dots, j + s$. Operátor \mathcal{A} v (9) má tedy tvar

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_j = \sum_{k=-s}^s A_{l+k}^l u_{j+k} , \quad (20)$$

kde $l \equiv j \pmod{p}$, a je určen $p(2s+1)$ maticemi A_{l+k}^l , $l = 0, \dots, p-1$, $k = -s, \dots, s$. Matice jsou čtvercové řádu d . Formálně předpokládejme, že A_{l+k}^l je rovno nulové matici pro $k \neq -s, \dots, s$.

Nyní ukážeme, jak můžeme určit spektrum operátoru \mathcal{A} užitím věty 4.6. Pro $n \in \mathbb{Z}$ označme

$$B_n = \begin{bmatrix} A_{np}^0 & \dots & A_{np+p-1}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{np}^{p-1} & \dots & A_{np+p-1}^{p-1} \end{bmatrix} , \quad (21)$$

B_n jsou čtvercové matice řádu pd . Je snadné ukázat, že pouze konečně mnoho matic $B_n \neq 0$. Tyto matice B_n reprezentují lineární operátor

$$\mathcal{B} : \mathbb{B}(pd) \rightarrow \mathbb{B}(pd) ,$$

který je definován následovně. Pro $\mathbf{w} = \{w_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{B}(pd)$

$$(\mathcal{B}\mathbf{w})_j = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B_n w_{j+n} . \quad (22)$$

Jestliže označíme \tilde{r} přirozený izomorfismus $\mathbb{B}(d)$ na $\mathbb{B}(pd)$ definovaný pro $\mathbf{u} \in \mathbb{B}(d)$ vztahem

$$\tilde{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \in \mathbb{B}(pd) , \quad (23)$$

kde

$$w_n = \begin{pmatrix} u_{np} \\ \vdots \\ u_{np+p-1} \end{pmatrix},$$

potom

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{v} \quad \text{právě tehdy, když} \quad \mathcal{B}(\tilde{r}(\mathbf{u})) = \tilde{r}(\mathbf{v}).$$

Z následujícího Lemma plyne, že spektrum operátoru \mathcal{A} je stejné jako spektrum operátoru \mathcal{B} a může být tudíž určeno pomocí věty 4.6.

Lemma 5.1 *Nechť $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$ a $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(Y)$, kde X, Y jsou Banachovy prostory. Nechť \tilde{r} je izomorfismus prostoru X na prostor Y a platí*

$$\mathcal{A}(u) = v \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B}(\tilde{r}(u)) = \tilde{r}(v). \quad (24)$$

Potom

$$\sigma_{\mathcal{L}(X)}(\mathcal{A}) = \sigma_{\mathcal{L}(Y)}(\mathcal{B}).$$

Důkaz:

Stačí dokázat, vztah

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(u) = v \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{B} - \lambda\mathcal{I})(\tilde{r}(u)) = \tilde{r}(v).$$

Nechť $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(u) = v$ potom $\mathcal{A}(u) = \lambda u + v$. Podle vztahu (24)

$$\mathcal{B}(\tilde{r}(u)) = \tilde{r}(\lambda u + v),$$

ale \tilde{r} je lineární, platí tedy $\mathcal{B}(\tilde{r}(u)) = \lambda\tilde{r}(u) + \tilde{r}(v)$ a tedy platí

$$\mathcal{B}(\tilde{r}(u)) - \lambda\tilde{r}(u) = \tilde{r}(v).$$

Dokázali jsme tedy vztah

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})(u) = v \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{B} - \lambda\mathcal{I})(\tilde{r}(u)) = \tilde{r}(v).$$

Protože \tilde{r}^{-1} je také izomorfismus, platí i opačná implikace. ■

5.1 Příklad LDS s prostorovou interakcí difuzního typu

Předpokládejme mřížkový dynamický system

$$(\mathcal{F}^n, \mathbb{B})_{n \in \mathbb{Z}^+},$$

který je pro $s = 1$ generovaný funkcí $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_2) + \frac{\varepsilon}{2}(g(x_1) - 2g(x_2) + g(x_3)) ,$$

kde g je nějaká nelineární funkce, která zobrazuje omezený interval na omezený interval. Jinými slovy dynamický systém

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathcal{F}(\mathbf{u}(n))$$

na \mathbb{B} je dán vztahem

$$u_j(n+1) = g(u_j(n)) + \frac{\varepsilon}{2}(g(u_{j-1}(n)) - 2g(u_j(n)) + g(u_{j+1}(n))) \quad (25)$$

a podmínka (5) je splněna.

Stabilitu prostorově 2-periodického řešení tohoto systému studovali také V. S. Afraimovich a L. A. Bunimovich v [2]. Jako fázový prostor předpokládali prostor \mathbb{B}_q , $q > 1$,

$$\mathbb{B}_q = \{\mathbf{u} \in \tilde{\mathbb{B}}(1) ; \|\mathbf{u}\|_q < \infty\} ,$$

kde

$$\|\mathbf{u}\|_q = \sqrt{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|u_j|^2}{q^{|j|}}} .$$

Protože tato norma je indukovaná skalárním součinem, \mathbb{B}_q je Hilbertův prostor. V tomto případě pro splnění podmínky (5) potřebujeme, aby funkce f byla diferencovatelná třídy C^2 a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\{u_0\}^s) \right| < C , \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\{u_0\}^s) \right| < C ,$$

$$i, j = 1, \dots, 2s+1 \text{ a } \{\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots\} \in \mathbb{B}_q$$

viz [2]. Tento požadavek je ale příliš silný, a v mnoha případech nebude splněn. V našem příkladě na straně 38 k splnění podmínky (5) stačí, aby funkce g byla omezená. Pro prostorově 2-periodické řešení Afraimovich a Bunimovich pouze odhadli spektrální poloměr operátoru \mathcal{A} definovaného níže vztahem (27) užitím Gershgorinových kroužků a tak obdrželi podmínku pro jeho stabilitu. Navíc v případě prostoru \mathbb{B}_q operátor \mathcal{A} nemusí být Fréchetovou derivací zobrazení \mathcal{F} , neboť Fréchetova derivace obecně nemusí existovat, ale je pouze derivací v smyslu Gâteaux. Z tohoto důvodu nelze v případě prostoru \mathbb{B}_q vyšetřovat exponenciální stabilitu. Lze vyšetřit pouze „lineární stabilitu“, což je fakt, že spektrum operátoru \mathcal{A} leží v jednotkové kružnici Gaussovy roviny.

V naší práci stanovíme spektrum operátoru \mathcal{A} a určíme podmínku pro exponenciální stabilitu prostorově 2-periodické hořešení dynamického systému (25) v případě fázového prostoru \mathbb{B} i lineární stabilitu v případě fázového prostoru \mathbb{B}_q . Výsledky porovnáme s výsledky v práci [2].

5.2 Příklad fázového prostoru \mathbb{B}

Zřejmě prostorově 2-periodické řešení \mathbf{u}^* systému (25) má tvar

$$\mathbf{u}^* = (\dots, x, y, x, y, \dots)$$

t.j. $u_j = x$ pro j sudé a $u_j = y$ pro j liché a x, y vyhovují rovnicím

$$\begin{aligned} x &= g(x) + \frac{\varepsilon}{2}(2g(y) - 2g(x)) \\ y &= g(y) + \frac{\varepsilon}{2}(2g(x) - 2g(y)) . \end{aligned}$$

Rovnice můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} x + y &= g(x) + g(y) \\ x - y &= (1 - 2\varepsilon)(g(x) - g(y)) . \end{aligned} \tag{26}$$

A tedy podmínka existence 2-periodického řešení je určena existencí řešení soustavy rovnic (26).

Nyní odvodíme Fréchetovu derivaci (popř. Gâteauxovu derivaci). V tomto případě pro čísla A_k^j ze vztahu (9) platí

$$A_k^j = \frac{\partial f(u_{j-1}^*, u_j^*, u_{j+1}^*)}{\partial x_{k-j+2}} \quad \text{for } j \in \mathbb{Z} \text{ a } k = j - 1, j, j + 1$$

a tedy

$$A_{j-1}^j = \frac{\varepsilon}{2}g'(u_{j-1}^*), \quad A_j^j = (1 - \varepsilon)g'(u_j^*), \quad A_{j+1}^j = \frac{\varepsilon}{2}g'(u_{j+1}^*) .$$

Označíme-li $g'(x) = d_x$ a $g'(y) = d_y$, potom operátor \mathcal{A} bude mít tvar

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_j = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2}d_y u_{j-1} + (1 - \varepsilon)d_x u_j + \frac{\varepsilon}{2}d_y u_{j+1} & \text{pro } j \text{ sudé} \\ \frac{\varepsilon}{2}d_x u_{j-1} + (1 - \varepsilon)d_y u_j + \frac{\varepsilon}{2}d_x u_{j+1} & \text{pro } j \text{ liché} \end{cases} \tag{27}$$

a jeho maticový zápis je

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \frac{\varepsilon}{2}d_x & (1-\varepsilon)d_y & \frac{\varepsilon}{2}d_x & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2}d_y & (1-\varepsilon)d_x & \frac{\varepsilon}{2}d_y & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2}d_x & (1-\varepsilon)d_y & \frac{\varepsilon}{2}d_x & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2}d_y & (1-\varepsilon)d_x & \frac{\varepsilon}{2}d_y & \dots \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Použijeme-li transformaci (23) víme, že spektrum operátoru \mathcal{A} je stejné jako spektrum operátoru $\mathcal{B} : \mathbb{B}(2) \rightarrow \mathbb{B}(2)$, který je dán vztahem

$$(\mathcal{B}\mathbf{w})_j = B_{-1}w_{j-1} + B_0w_j + B_1w_{j+1} \quad \text{pro } \mathbf{w} = \{w_j\} \in \mathbb{B}(2),$$

kde

$$B_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\varepsilon}{2}d_y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} (1-\varepsilon)d_x & \frac{\varepsilon}{2}d_y \\ \frac{\varepsilon}{2}d_x & (1-\varepsilon)d_y \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\varepsilon}{2}d_x & 0 \end{bmatrix}$$

a $w_j = \begin{pmatrix} u_{2j} \\ u_{2j+1} \end{pmatrix}$.

Zapišeme-li operátor \mathcal{B} pomocí operátoru posunu, dostáváme

$$\mathcal{B} = B_{-1}\mathcal{S}^{-1} + B_0\mathcal{S}^0 + B_1\mathcal{S}^1,$$

kde \mathcal{S} je Bernoulliho posun na \mathbb{B} . A tedy, podle věty 4.6, spektrum $\sigma(\mathcal{B})$ je množina takových komplexních čísel λ , které splňují rovnici

$$\det\left(\sum_{n=-1}^1 e^{in\varphi} B_n - \lambda E\right) = 0,$$

tedy

$$\det \begin{bmatrix} (1-\varepsilon)d_x - \lambda & \frac{\varepsilon}{2}d_y(1 + e^{-i\varphi}) \\ \frac{\varepsilon}{2}d_x(1 + e^{i\varphi}) & (1-\varepsilon)d_y - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

pro nějaké $\varphi \in [0, 2\pi]$. Toto $\lambda \in \mathbb{C}$ tedy splňují rovnici

$$\lambda^2 - (1-\varepsilon)(d_x + d_y)\lambda + ((1-\varepsilon)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}(1 + \cos \varphi))d_x d_y = 0. \quad (28)$$

Řešení této rovnice jsou

$$\lambda = \frac{(1-\varepsilon)(d_x + d_y) \pm \sqrt{(1-\varepsilon)^2(d_x - d_y)^2 + 2\varepsilon^2 d_x d_y (1 + \cos \varphi)}}{2}.$$

Odtud lze odvodit, že podmínka stability $|\lambda| < 1$ pro $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ je ekvivalentní s následujícími vztahy

$$\left. \begin{array}{l} 1. |(1 - \varepsilon)(d_x + d_y)| < 2 \text{ a } |(1 - \varepsilon)(d_x + d_y)| - (1 - 2\varepsilon)d_x d_y < 1 \\ \text{pro } d_x d_y \geq 0 . \\ \\ 2. |1 - \varepsilon|(|d_x + d_y| + |d_x - d_y|) < 2 \\ \text{pro } d_x d_y < 0 \text{ a } (1 - \varepsilon)^2(d_x - d_y)^2 + 4\varepsilon^2 d_x d_y \geq 0 . \\ \\ 3. |1 - \varepsilon|(|d_x + d_y| + |d_x - d_y|) < 2 \text{ a } (1 - 2\varepsilon)d_x d_y < 1 \\ \text{pro } d_x d_y < 0 \text{ a } (1 - \varepsilon)^2(d_x - d_y)^2 + 4\varepsilon^2 d_x d_y < 0 . \end{array} \right\} \quad (29)$$

5.3 Příklad fázového prostoru \mathbb{B}_q

Pro srovnání našich výsledků s výsledky v článku [2] určíme podmínku stability prostorově 2-periodického řešení dynamického systému $(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}_q)_{n \in \mathbb{Z}^+}$, popsaného rovnicí (25), kde za fázový prostor bereme prostor \mathbb{B}_q místo prostoru \mathbb{B} . Určíme zde ovšem pouze podmínku pro lineární stabilitu.

Lemma 5.2 *Spektrum Bernoulliho posunu $\mathcal{S} : \mathbb{B}_q \rightarrow \mathbb{B}_q$ je dáno vztahem*

$$\sigma(\mathcal{S}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \frac{1}{\sqrt{q}} \leq |\lambda| \leq \sqrt{q} \} .$$

Důkaz:

Nejdříve ukážeme, že

$$\|\mathcal{S}\| = \|\mathcal{S}^{-1}\| = \sqrt{q}$$

Pro $\mathbf{u} \in \mathbb{B}_q$ máme

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}\mathbf{u}\|_q^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|u_{j+1}|^2}{q^{|j|}} = \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{|u_{j+1}|^2}{q^{|j|}} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|u_{j+1}|^2}{q^{|j|}} = \\ &= \frac{1}{q} \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{|u_{j+1}|^2}{q^{-j-1}} + q \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|u_{j+1}|^2}{q^{j+1}} \leq \\ &\leq q \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{|u_{j+1}|^2}{q^{-j-1}} + q \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|u_{j+1}|^2}{q^{j+1}} = q \|\mathbf{u}\|^2 . \end{aligned}$$

A tak

$$\|\mathcal{S}\| \leq \sqrt{q} ,$$

a protože existuje $\mathbf{u} \in \mathbb{B}_q$, $\|\mathbf{u}\|_q = 1$ a $\|\mathcal{S}\mathbf{u}\|_q = \sqrt{q}$, máme $\|\mathcal{S}\| = \sqrt{q}$. Podobně dostaneme $\|\mathcal{S}^{-1}\| = \sqrt{q}$. Platí tedy $\sigma(\mathcal{S}) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \frac{1}{\sqrt{q}} \leq |\lambda| \leq \sqrt{q} \}$. Naopak pro

každé $\lambda \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{\sqrt{q}} < |\lambda| < \sqrt{q}$ je lehké zkonstruovat vlastní vektor, stačí zvolit vektor $\mathbf{u} = \{\lambda^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$. Protože $\sigma(\mathcal{S})$ je uzavřená množina, dostáváme tvrzení věty. ■

Podle věty 4.4 (za operátor \mathcal{T} vezmeme opět operátor \mathcal{S} a prostor X je prostor \mathbb{B}_q) spektrum operátoru \mathcal{A} definovaného rovnicemi (27) na prostoru \mathbb{B}_q je množina takových $\lambda \in \mathbb{C}$, které splňují rovnici

$$\det \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon)d_x - \lambda & \frac{\varepsilon}{2}d_y(1 + \alpha^{-1}e^{-i\varphi}) \\ \frac{\varepsilon}{2}d_x(1 + \alpha e^{i\varphi}) & (1 - \varepsilon)d_y - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

pro nějaké $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $\alpha \in \langle \frac{1}{\sqrt{q}}, \sqrt{q} \rangle$. Odtud dostaneme opět podmínky (29), které zaručují lineární stabilitu operátoru $\mathcal{A} : \mathbb{B}_q \rightarrow \mathbb{B}_q$ pro q dostatečně blízký k 1.

Podmínky stability (29) pro prostorově 2-periodické řešení dynamického systému (25) jsou silnější než ty, které byly odvozeny v [2], protože spektrální poloměr operátoru \mathcal{A} jsme určily přesně. Například v práci [2] je uvažován systém (25), kde

$$g(u) = \begin{cases} \mu u & \text{for } u \in \langle 0, \mu^{-1} \rangle \\ a & \text{for } u \in (\mu^{-1}, 1) \end{cases},$$

kde $\mu > 1$, $0 < \varepsilon \leq 1$ a $0 < a < 1$. Zřejmě je pro tento systém splněna podmínka (5). Jestliže $x \in (0, \mu^{-1})$ a $y \in (\mu^{-1}, 1)$, potom z (26) dostáváme

$$x + y = \mu x + a, \quad x - y = (1 - 2\varepsilon)(1 - \varepsilon)a.$$

A tedy

$$x = \frac{\varepsilon a}{1 - \mu + \varepsilon \mu}, \quad y = \frac{a\mu(2\varepsilon - 1) + (1 - \varepsilon)a}{1 - \mu + \varepsilon \mu}.$$

Za předpokladu, že

$$0 \leq x < \mu^{-1}, \quad \mu^{-1} < y \leq 1$$

dostáváme nerovnosti

$$0 \leq \frac{\varepsilon a}{1 - \mu + \varepsilon \mu} < \mu^{-1}, \quad \mu^{-1} < \frac{a\mu(2\varepsilon - 1) + (1 - \varepsilon)a}{1 - \mu + \varepsilon \mu} \leq 1,$$

které jsou podmínkou pro existenci prostorově 2-periodického řešení

$$\mathbf{u}^* = (\dots, x, y, x, y, \dots),$$

kde $x \in (0, \mu^{-1})$ a $y \in (\mu^{-1}, 1)$.

V článku [2] je odvozena podmínka lineární stability (v \mathbb{B}_q)

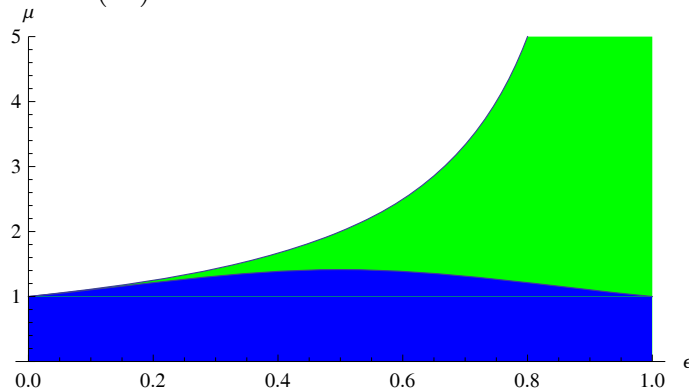
$$\mu^2(2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1) < 1 \tag{30}$$

pro q dostatečně blízké k 1.

Použitím našeho přístupu, podmínky (29) dávají

$$\mu|\varepsilon - 1| < 1 ,$$

protože v tomto případě platí $d_x = \mu$ a $d_y = 0$. Je vidět, že naše metoda dává lepší výsledek. Na obrázku 3 je zobrazena oblast stability odvozená v článku [2] a oblast stability odvozená v této práci pro příklad prostorově 2-periodického řešení dynamického systému (25).



Obrázek 3: Oblast stability pro příklad prostorově 2-periodického řešení dynamického systému (25) odvozená v článku [2] (modrá barva) a oblast stability odvozená v této práci (zelená barva).

Například pro parametry $\mu = 2, \varepsilon = 1$ a $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ existuje prostorově 2-periodické stacionární řešení

$$(\dots, a, 2a, a, 2a, \dots),$$

které podle naší metody je lineárně stabilní, ale podle metody uvedené v [2] nemůžeme o stabilitě nic říci, protože podmínka (30) není splněna.

6 Stabilita prostorově homogenních řešení LDS s vícerozměrnou mřížkou

V případě LDS s vícerozměrnou mřížkou nelze použít k určení spektra operátoru

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{l}-\vec{j}|\leq s} A_{\vec{l}}^{\vec{j}} u_{\vec{l}}$$

větu o obrazu spektra tak, jako tomu bylo v odstavci 4. Zde použijeme Gelfandovu transformaci na Banachových algebrách (viz Kapitola 2) nebo [19].

Abychom mohli použít vlastnosti Gelfandovy transformace, vyjádříme operátor \mathcal{A} jako lineární kombinaci mocnin speciálních operátorů. Nejdříve si zavedeme posun ve směru \vec{e}_j , kde $\vec{e}_j \in \mathbb{Z}^m$ je jednotkový vektor, který má na j -tém místě jedničku.

Definice 6.1 Posunem ve směru \vec{e}_j nazveme operátor $\mathcal{S}_j : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, $j = 1, \dots, m$, který je definován následovně:

$$(\mathcal{S}_j \mathbf{u})_{\vec{k}} = u_{\vec{k}+\vec{e}_j}. \quad (31)$$

Symbolem $\mathcal{S}^{\vec{k}}$, $\vec{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m$ budeme rozumět operátor

$$\mathcal{S}^{\vec{k}} = \mathcal{S}_1^{k_1} \circ \mathcal{S}_2^{k_2} \circ \dots \circ \mathcal{S}_m^{k_m},$$

kde $\mathcal{S}_j^{k_j}$ je k_j -tá iterace posunu \mathcal{S}_j .

Operátory $\mathcal{S}^{\vec{k}}$ komutují a

$$\|\mathcal{S}^{\vec{k}}\| = 1.$$

Operátor $\mathcal{A} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ (t.j. $(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{l}-\vec{j}|\leq s} A_{\vec{l}}^{\vec{j}} u_{\vec{l}}$, $d = 1$ a tedy $A_{\vec{k}}$ jsou čísla) pak můžeme s užitím posunů psát ve tvaru

$$\mathcal{A} = \sum_{|\vec{k}|\leq s} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}.$$

Abychom mohli zavést podobný zápis pro operátor $\mathcal{A} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$, $d > 1$ (t.j. $A_{\vec{k}}$ jsou čtvercové matice řádu d), zavedeme si (stejně jako v oddíle 4.2) maticový operátor $A\mathcal{T} : X^d \rightarrow X^d$, kde A je matice řádu d a $\mathcal{T} : X \rightarrow X$ je lineární spojitý operator na Banachově prostoru X .

V odstavci 6.2 budeme potřebovat ztotožnit prvek $\mathbf{u} \in \mathbb{B}(d)$ s prvkem $\mathbf{u} \in \mathbb{B}^d$, kde \mathbb{B}^d je d -tá mocnina \mathbb{B} . Každý prvek $\mathbf{u} \in \mathbb{B}(d)$ lze ztotožnit se zobrazením

$\mathbf{u} : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$. Protože platí $(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{Z}^m} \cong (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^m})^d$, každému $\mathbf{u} \in \mathbb{B}(d)$ odpovídá d -tice prvků $\mathbf{u} = (\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^d)$, $\mathbf{u}^j \in \mathbb{B}$, a naopak. Z toho plyne, že

$$\mathbb{B}(d) \cong \mathbb{B}^d,$$

tj. existuje přirozený izomorfismus

$$\alpha : \mathbb{B}^d \rightarrow \mathbb{B}(d), \quad \alpha((\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^d)) = \mathbf{u} \in \mathbb{B}(d),$$

kde $\mathbf{u}^i = \{u_{\vec{j}}^i\}_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m}$, $u_{\vec{j}}^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$ a $(\mathbf{u})_{\vec{j}} = (u_{\vec{j}}^1, \dots, u_{\vec{j}}^d) \in \mathbb{R}^d$. V dalších odstavcích ztotožníme prostor $\mathbb{B}(d)$ s prostorem \mathbb{B}^d .

Nyní můžeme operátor \mathcal{A} definovaný rovnicí $(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{l}-\vec{j}| \leq s} A_{\vec{l}}^{\vec{j}} u_{\vec{l}}$ i v případě $\mathcal{A} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$ zapsat pomocí posunů ve tvaru

$$\mathcal{A} = \sum_{|\vec{k}| \leq s} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}, \quad (32)$$

kde $A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}$ je maticový operátor.

6.1 Vícedimenzionální LDS na \mathbb{B}

V tomto oddíle budeme uvažovat operátory $\mathcal{A} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$. V důkazu hlavní věty 6.1 využijeme vlastností Gelfandovy transformace prvků Banachovy algebry (viz Oddíl 2.3). Je-li \mathfrak{A} Banachova algebra, pak charakterem na algebře \mathfrak{A} rozumíme libovolný nenulový multiplikativní lineární funkcionál $\chi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Množinu všech charakterů na algebře \mathfrak{A} značíme symbolem $\Omega(\mathfrak{A})$. Gelfandovou transformací prvku $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ nazýváme zobrazení $\hat{\mathcal{A}} : \Omega(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathbb{C}$, definované vztahem

$$\hat{\mathcal{A}}(\chi) = \chi(\mathcal{A}).$$

Pro spektrum prvku $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ v komutativní algebře \mathfrak{A} platí (viz věta 2.4)

$$\sigma_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) = \hat{\mathcal{A}}(\Omega(\mathfrak{A})). \quad (33)$$

V dalším budeme uvažovat Banachovu algebru $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ všech omezených lineárních operátorů na Banachově prostoru \mathbb{B} a její komutativní podalgebru

$$\mathfrak{A} = \left\{ \mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}); \mathcal{A} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}, A_{\vec{k}} \in \mathbb{C} \text{ a } \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}| < +\infty \right\}, \quad (34)$$

kde $\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}| \stackrel{def}{=} \sup \left\{ \sum_{\vec{k} \in J} |A_{\vec{k}}|; J \subset \mathbb{Z}^m, J \text{ konečná} \right\}$.

Spektrum prvku $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ v algebře $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ (které chceme určit) budeme značit $\sigma(\mathcal{A})$, v algebře \mathfrak{A} pak $\sigma_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$.

Lemma 6.1 Množina \mathfrak{A} definovaná vztahem (34) je podalgebrou algebry $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ a platí:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \text{Je-li } \mathcal{A} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}, \quad \mathcal{B} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} B_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}, \text{ pak} \\
& \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{C} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} C_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}, \quad \text{kde } C_{\vec{k}} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}-\vec{n}} B_{\vec{n}}. \quad (35) \\
(ii) \quad & \|\mathcal{A}\|_{\mathfrak{A}} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}|. \\
(iii) \quad & \mathfrak{A} \text{ je izometricky izomorfní s } l^1(\mathbb{Z}^m).
\end{aligned}$$

(Zde $l^1(\mathbb{Z}^m)$ označuje Banachovu algebru všech absolutně konvergentních řad na \mathbb{Z}^m s násobením daným konvolucí.)

Poznámka : Pro konvoluci dvou posloupností $a = \{A_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m}$, $b = \{B_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m}$ platí

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})_{\vec{j}} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{j}-\vec{n}} B_{\vec{n}} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} B_{\vec{j}-\vec{k}} = (\mathbf{b} * \mathbf{a})_{\vec{j}}.$$

(Pro operaci konvoluce jsme použili symbol $*$)

Zavedeme-li násobení prvků z množiny \mathfrak{A} jako skládání operátorů, plyne ze vztahu (iii) lemma 6.1, že \mathfrak{A} je komutativní Banachova algebra s jednotkou.

Důkaz:

Nejdříve dokážeme vztah (i)

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} &= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}} \circ \sum_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m} B_{\vec{j}} \mathcal{S}^{\vec{j}} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} B_{\vec{j}} \mathcal{S}^{\vec{k}} \circ \mathcal{S}^{\vec{j}} = \\
&= \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} B_{\vec{j}} \mathcal{S}^{\vec{k}+\vec{j}} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^m} \left(\sum_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{n}-\vec{j}} B_{\vec{j}} \right) \mathcal{S}^{\vec{n}} = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^m} C_{\vec{n}} \mathcal{S}^{\vec{n}}, \\
&\text{kde jsme položili } \vec{n} = \vec{k} + \vec{j}.
\end{aligned}$$

Nyní dokážem vztah (ii)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}\|_{\mathfrak{A}} &= \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \sup_{\vec{i} \in \mathbb{Z}^m} \left| \left(\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}} \mathbf{x} \right)_{\vec{i}} \right| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \sup_{\vec{i} \in \mathbb{Z}^m} \left| \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathbf{x}_{\vec{i}+\vec{k}} \right| \leq \\
&\leq \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \sup_{\vec{i} \in \mathbb{Z}^m} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}| |\mathbf{x}_{\vec{i}+\vec{k}}| \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}| \|\mathbf{x}\| = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}|
\end{aligned}$$

Nyní zvolíme pro daný operátor \mathcal{A} vektor $\mathbf{x} = \{x_{\vec{k}}\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m}$, kde $x_{\vec{k}} = 1$, jeli $A_{\vec{k}} > 0$ a $x_{\vec{k}} = -1$, jeli $A_{\vec{k}} < 0$. Potom platí

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sup_{\vec{i} \in \mathbb{Z}^m} \left| \left(\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}} \mathbf{x} \right)_{\vec{i}} \right| = \sup_{\vec{i} \in \mathbb{Z}^m} \left| \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathbf{x}_{\vec{i}+\vec{k}} \right| = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}|$$

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathfrak{A}} \geq \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}|.$$

Platí tedy

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathfrak{A}} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}|.$$

(iii)

Každému prvku $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ můžeme jednoznačně přiřadit prvek $\mathbf{a} = \{A_{\vec{k}}\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} \in l^1(\mathbb{Z}^m)$ vztahem $\mathcal{A} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}$. Množina \mathfrak{A} je tedy izomorfní s množinou $l^1(\mathbb{Z}^m)$. Protože navíc ze vztahu (ii) plyne

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathfrak{A}} = \|\mathbf{a}\|_{l^1(\mathbb{Z}^m)}, \quad \mathbf{a} = \{A_{\vec{k}}\}_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} \in l^1(\mathbb{Z}^m,)$$

je \mathfrak{A} izometricky izomorfní s $l^1(\mathbb{Z}^m)$. ■

Popíšeme nyní charaktery na algebře \mathfrak{A} . Pro $\vec{t} = (t_1, \dots, t_m)$, $t_i \in [0, 2\pi)$ a $\mathcal{A} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}} \in \mathfrak{A}$ definujeme

$$\chi_{\vec{t}}(\mathcal{A}) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}} A_{\vec{k}}.$$

Snadno se ukáže, že $\chi_{\vec{t}}$ je charakter z $\Omega(\mathfrak{A})$. Dále ukážeme, že jiné charaktery na \mathfrak{A} nejsou. Nechť $\chi \in \Omega(\mathfrak{A})$. Nejprve ukážeme, že

$$|\chi(\mathcal{S}_k)| = 1 \tag{36}$$

pro každý posun \mathcal{S}_k ve směru \vec{e}_k .

Zřejmě

$$|\chi(\mathcal{S}_k)| \leq 1 \quad \text{a} \quad |\chi(\mathcal{S}_k^{-1})| \leq 1,$$

neboť pro všechny $A \in \mathfrak{A}$ je $|\chi(A)| \leq r_{\sigma(A)} \leq \|\mathcal{A}\|$ viz [19] a $|\mathcal{S}_k| = |\mathcal{S}_k^{-1}| = 1$.

Kdyby $|\chi(\mathcal{S}_k)| < 1$, potom

$$1 = |\chi(I)| = |\chi(\mathcal{S}_k \circ \mathcal{S}_k^{-1})| \leq |\chi(\mathcal{S}_k)| |\chi(\mathcal{S}_k^{-1})| < 1$$

což je spor.

Ze vztahu (36) tedy plyne, že pro každý charakter $\chi \in \Omega(\mathfrak{A})$ existuje \vec{t} , $t_k \in [0, 2\pi)$ takové, že

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{S}_k) &= e^{i(\vec{e}_k \cdot \vec{t})} = e^{it_k}, \\ \chi(\mathcal{S}_k^{-1}) &= e^{-i(\vec{e}_k \cdot \vec{t})} = e^{-it_k}. \end{aligned}$$

Protože algebra \mathfrak{A} je generovaná prvky \mathcal{S}_k a \mathcal{S}_k^{-1} , dokázali jsme následující lemma:

Lemma 6.2 *Množina charakterů na algebře \mathfrak{A} je dána vztahem*

$$\Omega(\mathfrak{A}) = \{\chi_{\vec{t}}; \vec{t} = (t_1, \dots, t_m), t_i \in [0, 2\pi), i = 1, \dots, m\}.$$

■

Nyní můžeme zformulovat hlavní větu tohoto oddílu.

Věta 6.1 *Je-li operátor $\mathcal{A} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}$ ($\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}| < \infty$, $|A_{\vec{k}}|$ je absolutní hodnota), potom spektrum operátoru \mathcal{A} (v Banachově algebře $\mathcal{L}(\mathbb{B})$) je dáno vztahem:*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}}, \vec{t} = (t_1, \dots, t_m), t_i \in [0, 2\pi) \right\}. \quad (37)$$

Důkaz:

Podle vztahu (33) a lema 6.2 je

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) &= \{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \hat{\mathcal{A}}(\chi), \chi \in \Omega(\mathfrak{A}) \} = \{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \chi(\mathcal{A}), \chi \in \Omega(\mathfrak{A}) \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \chi_{\vec{t}}(\mathcal{A}), \vec{t} = (t_1, \dots, t_m), t_i \in [0, 2\pi) \} \\ &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}} A_{\vec{k}}, \vec{t} = (t_1, \dots, t_m), t_i \in [0, 2\pi) \right\}. \end{aligned}$$

Protože $\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}(\mathbb{B})$, platí obecně

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}).$$

Snadno se ale přesvědčíme, že každé číslo $\lambda = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}} A_{\vec{k}} \in \sigma_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$ je dokonce vlastní číslo operátoru \mathcal{A} a $\mathbf{v} = \{e^{i(\vec{j} \cdot \vec{t})}\}_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m}$ je vlastní vektor příslušející k vlastnímu číslu λ . Je totiž

$$(\mathcal{A}\mathbf{v})_{\vec{j}} = \left(\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}} \mathbf{v} \right)_{\vec{j}} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathbf{v}_{\vec{k}+\vec{j}} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{k}+\vec{j})} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{k})} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{j})} = (\lambda \mathbf{v})_{\vec{j}},$$

pro všechna $\vec{j} \in \mathbb{Z}^m$. Platí tedy

$$\left\{ \lambda = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}}, \vec{t} = (t_1, \dots, t_m), t_i \in (0, 2\pi) \right\} = \sigma_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A}).$$

Tím je Věta 6.1 dokázána. ■

Použití věty 6.1 si ukážeme na následujícím příkladě:

Příklad 3 Mějme lineární operator $\mathcal{A} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ definovaný pro $\mathbf{u} = \{u_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \in \mathbb{B}$ vztahem:

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{i,j} = 4u_{i+1,j} + 6u_{i+2,j} + 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}.$$

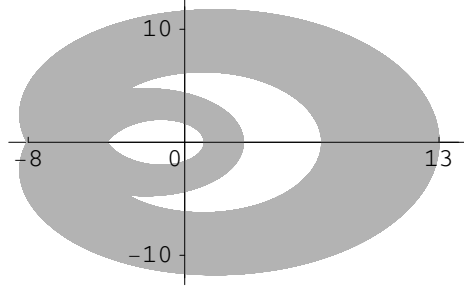
Potom

$$\mathcal{A} = 4\mathcal{S}^{(1,0)} + 6\mathcal{S}^{(2,0)} + 2\mathcal{S}^{(0,1)} + \mathcal{S}^{(1,1)}.$$

Spektrum operátoru \mathcal{A} je podle věty 6.1

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda = 4e^{it_1} + 6e^{i2t_1} + 2e^{it_2} + e^{i(t_1+t_2)}; (t_1, t_2) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)\}.$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku 4.



Obrázek 4:

Nyní můžeme vyslovit větu o stabilitě prostorově homogenního řešení v případě m -rozměrné mřížky na prostoru \mathbb{B} .

Věta 6.2 *Nechť \mathcal{A} Fréchetova derivace zobrazení \mathcal{F} v bodě $\mathbf{u}^* = \{u^0\}_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m}$, tedy*

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{k}| \leq s} A_{\vec{k}} u_{\vec{j}+\vec{k}}, \quad A_{\vec{k}} = \frac{\partial f(\{u^0\}^s)}{\partial u_{\vec{k}}} \text{ pro } |\vec{k}| \leq s.$$

Potom prostorově homogenní stacionární řešení \mathbf{u}^ LDS $(\mathcal{F}^n, \mathbb{B})_{n \in \mathbb{Z}^+}$ je exponenciálně stabilní jestliže*

$$\left| \sum_{|\vec{k}| \leq s} A_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}} \right| < 1 \text{ pro } \vec{t} \in [0, 2\pi)^m.$$

Větu použijeme v následujícím příkladě:

Příklad 4 Nyní aplikujeme předchozí teorii na určení stability prostorově homogenního řešení následujícího mřížkového dynamického systému. Uvažujme systém (viz [4])

$$u_{ij}(n+1) = u_{ij}(n) + \alpha g(u_{ij}(n)) + \kappa(u_{i+1,j}(n) - 4u_{ij}(n) + u_{i-1,j}(n) + u_{i,j-1}(n) + u_{i,j+1}(n)), \quad (38)$$

kde $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$, $\kappa > 0$ a $g(u) = u(u - a)(1 - u)$. Tento systém vznikne diskretizací dvoudimenzionální nelineární difúzní Huxleyovy rovnice použitím diferenční náhrady z pěti uzlových bodů. Systém (38) je mřížkový dynamický systém na \mathbb{Z}^2 , kde $m = 2$, $d = 1$, $s = 1$ a

$$f(\{u_{ij}\}^s) = u_{ij} + \alpha g(u_{ij}) + \kappa(u_{i+1,j} - 4u_{ij} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}),$$

můžeme jej tedy zapsat ve tvaru $\mathbf{u}(n+1) = \mathcal{F}(\mathbf{u}(n))$. Protože funkce g zobrazuje omezený interval z \mathbb{R} na omezený interval z \mathbb{R} zobrazení \mathcal{F} splňuje podmínku (5).

Systém (38) má kromě jiných stacionárních řešení také prostorově homogenní stacionární řešení $\mathbf{u}^* = \{0\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$, $\mathbf{u}^* = \{1\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$, $\mathbf{u}^* = \{a\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$, která dostaneme řešením rovnice

$$u^0 = u^0 + \alpha g(u^0) + \kappa(u^0 - 4u^0 + u^0 + u^0 + u^0),$$

tedy

$$g(u^0) = u^0(u^0 - a)(1 - u^0) = 0.$$

Linearizovaný operátor $\mathcal{A} = d\mathcal{F}|_{\mathbf{u}^*}$ v případě stacionárního řešení $\mathbf{u}^* = \{0\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ má tvar

$$(\mathcal{A})_{i,j} = \kappa u_{i-1,j} + \kappa u_{i,j-1} + (1 - 4\kappa - \alpha a)u_{i,j} + \kappa u_{1,j+1} + \kappa u_{i+1,j}.$$

Zapíšeme-li operátor \mathcal{A} pomocí posunů, dostaneme

$$\mathcal{A} = \kappa \mathcal{S}^{(-1,0)} + \kappa \mathcal{S}^{(0,-1)} + (1 - 4\kappa - \alpha a) \mathcal{S}^{(0,0)} + \kappa \mathcal{S}^{(1,0)} + \kappa \mathcal{S}^{(0,1)}.$$

Spektrum operátoru \mathcal{A} je podle Věty 6.1:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{A}) &= \{ \lambda = \kappa e^{-it_1} + \kappa e^{-it_2} + (1 - 4\kappa - \alpha a) + \kappa e^{it_1} + \kappa e^{it_2}, (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2 \} = \\ &= \left\{ \lambda = 2\kappa (\cos(t_1) + \cos(t_2)) + (1 - 4\kappa - \alpha a) \right\} = \\ &= \left\{ \lambda = 4\kappa \cos\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \cos\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) + (1 - 4\kappa - \alpha a) \right\}. \end{aligned}$$

Prostorově homogenní stacionární řešení $\mathbf{u}^* = \{0\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ je stabilní, jestliže $r_\sigma(\mathcal{A}) < 1$, tedy pro

$$\kappa < \frac{1}{8}(2 - a\alpha) \quad \text{a} \quad a > 0.$$

Oblast stability je určena nerovnostmi

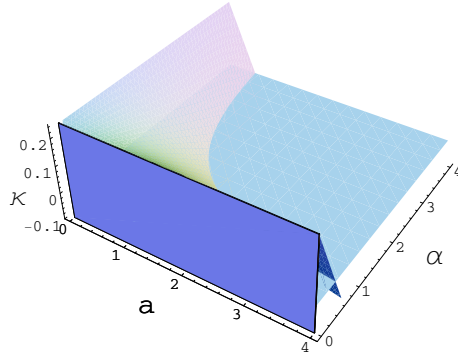
$$\kappa < \frac{1}{8}(2 - a\alpha), \quad a > 0, \quad \kappa > 0, \quad \alpha > 0$$

a její hraniční plochy jsou zobrazeny na obrázku 5.

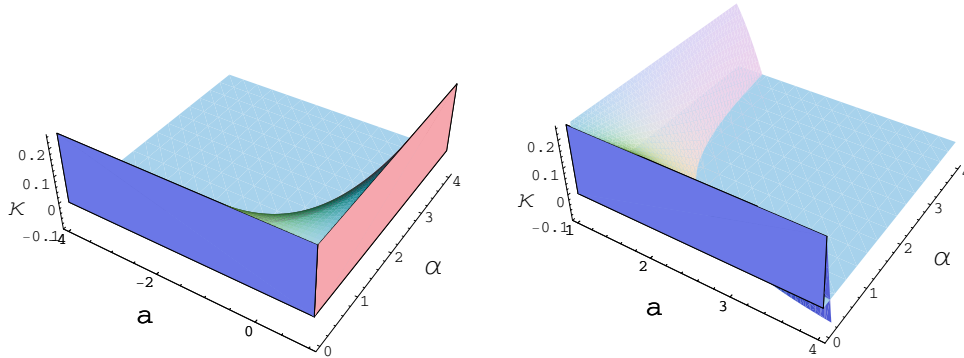
Podobně dostaneme, že prostorově homogenní stacionární řešení $\mathbf{u}^* = \{1\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ (resp. $\mathbf{u}^* = \{a\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$) je stabilní pro

$$\kappa < \frac{1}{8}(2 - \alpha(1 - a)) \quad \text{a } a < 1, \quad (\text{resp. } \kappa < \frac{1}{8}(2 + a\alpha(1 - a)) \quad \text{a } a > 1).$$

Hraniční plochy oblasti stability jsou zobrazeny na obrázku 6.



Obrázek 5: Oblast stability pro prostorově homogenní stacionární řešení $\mathbf{u}^* = \{0\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$



Obrázek 6: Oblast stability pro prostorově homogenní stacionární řešení $\mathbf{u}^* = \{1\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ a $\mathbf{u}^* = \{a\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$

6.2 Vícedimenzionální LDS na $\mathbb{B}(d)$

V tomto oddíle určíme spektrum operátoru $\mathcal{A} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$, $(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{i}-\vec{j}| \leq s} A_{\vec{i}}^{\vec{j}} u_{\vec{i}}$ pomocí věty 4.5 o maticových operátorech a věty 6.1 z předchozího odstavce. V následující větě, budeme-li to potřebovat, ztotožníme prostor $\mathbb{B}(d)$ s prostorem \mathbb{B}^d , to můžeme udělat na základě poznámek na straně 41.

Věta 6.3 *Nechť $A_{\vec{k}}$ jsou komplexní čtvercové matice řádu d takové, že $\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} |A_{\vec{k}}| < \infty$, kde $|A_{\vec{k}}|$ je maticová norma indukovaná euklidovskou normou v \mathbb{R}^d . Nechť operátor $\mathcal{A} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$ je dán vztahem*

$$\mathcal{A} = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}. \quad (39)$$

Potom

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C}; \det(\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}} A_{\vec{k}} - \lambda E) = 0 \text{ pro nějaké } \vec{t} = (t_1, \dots, t_m), t_i \in [0, 2\pi)^m \}.$$

(Zde E označuje čtvercovou jednotkovou matici řádu d .)

Poznamenejme, že věta 6.1 je speciálním případem věty 6.3.

Důkaz:

Větu 6.3 dokážeme pomocí vět 6.1 a 4.5. Symbolem \mathcal{I}_d budeme značit identický operátor na $\mathbb{B}(d)$, symbolem \mathcal{I} pak identický operátor na \mathbb{B} .

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{A}) &= \{ \lambda \in \mathbb{C}; \mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}_d \text{ není vzájemně jednoznačný operátor na } \mathbb{B}(d) \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C}; \det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}_d) \text{ není vzájemně jednoznačný operátor na } \mathbb{B} \} \\ &= \{ \lambda \in \mathbb{C}; 0 \in \sigma(\det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}_d)) \}, \end{aligned}$$

jak plyne z věty 4.5 (Zde jsme použili vztah $\mathbb{B}(d) \cong \mathbb{B}^d$).

Protože $\det(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}_d) = \det(\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}} - \lambda E \mathcal{I})$ je prvkem algebry \mathfrak{A} definované vztahem (34), z věty 6.1 okamžitě plyne

$$0 \in \sigma(\det(\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}} - \lambda E \mathcal{I})) \Leftrightarrow 0 = \det(\sum_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\vec{k} \cdot \vec{t}} A_{\vec{k}} - \lambda E) \text{ pro nějaké } \vec{t}, t_i \in [0, 2\pi).$$

Tím je věta dokázána. ■

Také nyní si pro ilustraci uvedeme následující příklad.

Příklad 5 Mějme lineární operátor $\mathcal{A} : \mathbb{B}(2) \rightarrow \mathbb{B}(2)$ definovaný vztahem

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{ij} = A_{11}u_{i+1,j+1} + A_{00}u_{i,j} + A_{-1-1}u_{i-1,j-1},$$

kde $\mathbf{u} = \{u_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$, $u_{i,j} \in \mathbb{R}^2$ a

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{-1-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Potom

$$\mathcal{A} = A_{11} \mathcal{S}^{(1,1)} + A_{00} \mathcal{I} + A_{-1-1} \mathcal{S}^{(-1,-1)}.$$

Spektrum operátoru A je podle věty 6.3

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \det(A_{11}e^{i(t_1+t_2)} + A_{00} + A_{-1-1}e^{i(-t_1-t_2)} - \lambda E) = 0, \\ (t_1, t_2) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)\}.$$

Rovnici $\det(A_{11}e^{i(t_1+t_2)} + A_{00} + A_{-1-1}e^{i(-t_1-t_2)} - \lambda E) = 0$ lze přepsat na tvar

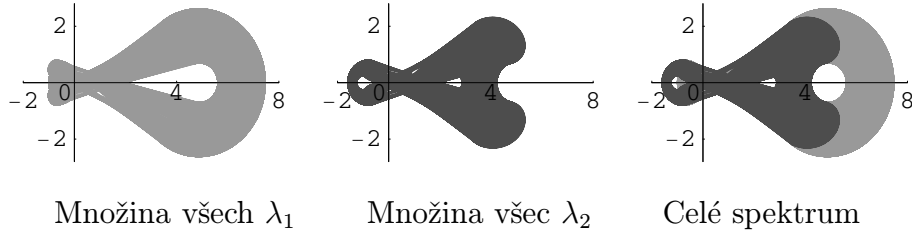
$$-4 - e^{(2i)t_1} - e^{it_1-it_2} - \frac{4}{e^{it_2}} - e^{(-2i)t_2} - 4\lambda - e^{it_1}\lambda - \frac{\lambda}{e^{it_2}} + \lambda^2 = 0,$$

a má tedy dvě řešení

$$\lambda_1 = \frac{(e^{it_1+2it_2} + e^{it_2} + 4e^{2it_2} + e^{it_2}\alpha)}{2e^{2it_2}} \\ \lambda_2 = \frac{(e^{it_1+2it_2} + e^{it_2} + 4e^{2it_2} - e^{it_2}\alpha)}{2e^{2it_2}}, \quad (40)$$

$$\text{kde } \alpha = \sqrt{5 + 6e^{it_1+it_2} + 8e^{it_1+2it_2} + 5e^{2it_1+2it_2} + 24e^{it_2} + 32e^{2it_2}}.$$

Spektrum je zobrazeno na obrázku 7.



Obrázek 7:

Vraťme se nyní ke stabilitě stacionárního řešení našeho LDS. Stabilita stacionárního řešení \mathbf{u}^* je určena spektrem Frechetovy derivace operátoru \mathcal{F} , kterou jsme označili \mathcal{A} . V oddíle 3.3 jsme si ukázali, že v případě prostorově homogenního řešení $\mathbf{u}^* = \{u_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}^m}$ je operátor \mathcal{A} určen $(2s+1)^m$ maticemi $A_{\vec{k}}$, $|\vec{k}| \leq s$ a má tvar

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{k}| \leq s} A_{\vec{k}} u_{\vec{j}+\vec{k}}. \quad (41)$$

Platí následující věta:

Věta 6.4 *Nechť $\mathcal{A} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$,*

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{k}| \leq s} A_{\vec{k}} u_{\vec{j}+\vec{k}},$$

kde $A_{\vec{k}}$ jsou dané matice řádu d . Potom

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; \det(\sum_{|\vec{k}| \leq s} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{t})} A_{\vec{k}} - \lambda E) = 0 , \vec{t} = (t_1, \dots, t_m), t_i \in [0, 2\pi) \} .$$

Důkaz:

Protože $\mathcal{A} = \sum_{|\vec{k}| \leq s} A_{\vec{k}} \mathcal{S}^{\vec{k}}$ (viz odstavec 6 vztah 32), kde $\mathcal{S}^{\vec{k}} = \mathcal{S}_1^{k_1} \circ \dots \circ \mathcal{S}_m^{k_m}$,

$\mathcal{S}_i^{k_i} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ je posun ve směru \vec{e}_i . Vyplývá tvrzení věty přímo z věty 6.3. ■

7 Stabilita prostorově periodických řešení LDS s vícerozměrnou mřížkou

Předcházející výsledky nám umožní určit stabilitu prostorově periodických stacionárních řešení LDS i v případě m -rozměrné mřížky. Pro $\vec{k}, \vec{p} \in \mathbb{Z}^m$, $\vec{k} = (k_1, \dots, k_m)$, $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ zavedeme označení

$$\vec{k} \odot \vec{p} = (k_1 p_1, \dots, k_m p_m).$$

Nyní budeme definovat prostorově \vec{p} -periodické stacionární řešení.

Definice 7.1 Pevný bod $\mathbf{u}^* = \{u_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}^m}$ zobrazení \mathcal{F} nazveme prostorově \vec{p} -periodické řešení, kde $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $p_i \geq 1$, pro $i = 1, \dots, m$, jestliže platí

$$u_j^* = u_{j + \vec{n} \odot \vec{p}}^*$$

pro všechny $\vec{j}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^m$.

Poznamenejme, že prostorově \vec{p} -periodické řešení, pro které $p_i = 1$, pro všechna $i = 1, \dots, m$, je prostorově homogenní stacionární řešení.

Mějme mřížkový dynamický systém

$$(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}(d))_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

generovaný funkcí $f : \mathbb{R}^{(2s+1)^m d} \rightarrow \mathbb{R}^d$ a jeho prostorově \vec{p} -periodické stacionární řešení \mathbf{u}^* . Bez újmy na obecnosti, můžeme předpokládat, že $s \leq \min_{i=1, \dots, m} \{p_i\}$. Uvažujme izomorfní mřížkový dynamický systém

$$(\mathcal{F}_{\vec{p}}^n, \mathbb{B}(qd))_{n \in \mathbb{Z}_+}$$

generovaný funkcí $f_{\vec{p}} : \mathbb{R}^{3^m qd} \rightarrow \mathbb{R}^{qd}$, kde $q = p_1 p_2 \cdots p_m$. Přitom prostorově \vec{p} -periodické stacionární řešení \mathbf{u}^* systému \mathcal{F} přejde na prostorově homogenní stacionární řešení \mathbf{w}^* systému $\mathcal{F}_{\vec{p}}$. Vyšetřování stability periodického řešení \mathbf{u}^* systému \mathcal{F} tím převedeme na vyšetřování stability homogenního řešení \mathbf{w}^* systému $\mathcal{F}_{\vec{p}}$, ke kterému můžeme využít výsledků oddílu 6.2.

Nyní sestrojíme mřížkový dynamický systém $(\mathcal{F}_{\vec{p}}^n, \mathbb{B}_{qd})_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Uvažujme množinu indexů \mathcal{I}

$$\mathcal{I} = \{\vec{j} = (j_1, \dots, j_m) \in \mathbb{Z}^m, j_i = 0, \dots, p_i - 1, \text{ pro } i = 1, \dots, m\}$$

a její nějaké uspořádání $\mathcal{I} = (\vec{j}_1, \dots, \vec{j}_q)$. Označme \tilde{r} přirozený izomorfismus $\mathbb{B}(d)$ na $\mathbb{B}(qd)$

$$\tilde{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \in \mathbb{B}(qd) \quad \text{pro } \mathbf{u} \in \mathbb{B}(d),$$

kde

$$w_{\vec{k}} = (u_{\vec{k} \odot \vec{p} + \vec{j}_1}, \dots, u_{\vec{k} \odot \vec{p} + \vec{j}_q})^T, \quad \text{pro } \vec{k} \in \mathbb{Z}^m. \quad (42)$$

Dále zavedeme $f_{\vec{p}} : \mathbb{R}^{3mqd} \rightarrow \mathbb{R}^{qd}$ předpisem

$$f_{\vec{p}}(\{w_{\vec{k}}\}^1) = (f(\{u_{\vec{k} \odot \vec{p} + \vec{j}_1}\}^s), \dots, f(\{u_{\vec{k} \odot \vec{p} + \vec{j}_q}\}^s))^T. \quad (43)$$

Zobrazení $\mathcal{F}_{\vec{p}} : \mathbb{B}(qd) \rightarrow \mathbb{B}(qd)$ určené vztahem

$$(\mathcal{F}_{\vec{p}}\mathbf{w})_{\vec{j}} = f_{\vec{p}}(\{w_{\vec{j}}\}^1).$$

definuje hledaný mřížkový dynamický systém $(\mathcal{F}_{\vec{p}}^n, \mathbb{B}(qd))_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Postup ilustrujeme na následujícím příkladě.

Příklad 6 Uvažujme mřížkový dynamický systém $\mathbf{u}(n+1) = \mathcal{F}(\mathbf{u}(n))$ na \mathbb{B} s dvojrozměrnou mřížkou, který je určen následujícími rovnicemi

$$\begin{aligned} u_{i,j}(n+1) = & g(u_{i,j}(n)) + \frac{\varepsilon}{4}(g(u_{i,j-1}(n)) - 4g(u_{i,j}(n)) + g(u_{i,j+1}(n)) + \\ & + g(u_{i-1,j}(n)) + g(u_{i+1,j}(n))), \end{aligned} \quad (44)$$

tedy LDS se zobrazením \mathcal{F} je generován funkcí f , pro kterou platí

$$f(\{u_{i,j}\}^1) = g(u_{i,j}) + \frac{\varepsilon}{4}(g(u_{i,j-1}) - 4g(u_{i,j}) + g(u_{i,j+1}) + g(u_{i-1,j}) + g(u_{i+1,j}))$$

Podobný systém na jednorozměrné mřížce byl uvažován v článku [2] a v oddíle 5.1.

Předpokládejme, že je dáno prostorově (2,2)-periodické stacionární řešení systému (44) ve tvaru

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & y & x & y & x & \dots \\ \dots & x & y & x & y & \dots \\ \dots & y & x & y & x & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix},$$

kde $u_{i,j} = x$ pro $i+j$ sudé a $u_{i,j} = y$ pro $i+j$ liché. Snadno se ukáže, že x, y splňují rovnice

$$\begin{aligned} x &= g(x) + \varepsilon(g(y) - g(x)) \\ y &= g(y) + \varepsilon(g(x) - g(y)). \end{aligned} \quad (45)$$

Existence takového řešení je diskutována v [2].

Zavedeme uspořádanou množinu indexů $\mathcal{I} = ((0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1))$. Nyní uvažujme prvek $\mathbf{w} \in \mathbb{B}(4)$, $\mathbf{w} = \{w_{k,l}\}_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2}$, pro který platí

$$w_{k,l} = \{u_{(2k,2l)+\vec{i}}\}_{\vec{i} \in \mathcal{I}} = \begin{pmatrix} u_{2k,2l} \\ u_{2k+1,2l} \\ u_{2k,2l+1} \\ u_{2k+1,2l+1} \end{pmatrix}.$$

Funkce $f_{\vec{p}} : \mathbb{R}^{36} \rightarrow \mathbb{R}^4$ má následující tvar

$$f_{\vec{p}}(\{w_{k,l}\}^1) = \{f(\{u_{2k,2l+\vec{i}}\}^1)\}_{\vec{i} \in \mathcal{I}} = \begin{pmatrix} f(\{u_{2k,2l}\}^1) \\ f(\{u_{2k+1,2l}\}^1) \\ f(\{u_{2k,2l+1}\}^1) \\ f(\{u_{2k+1,2l+1}\}^1) \end{pmatrix}.$$

Funkce $f_{\vec{p}}$ generuje mřížkový dynamický systém $\mathcal{F}_{\vec{p}} : \mathbb{B}(4) \rightarrow \mathbb{B}(4)$. Prvek $\mathbf{w}^* \in \mathbb{B}(4)$, $w_{k,l}^* = (x, y, y, x)^T$ pro všechna $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ je prostorově homogenní řešení dynamického systému $\mathbf{w}(n+1) = \mathcal{F}_{\vec{p}}(\mathbf{w}(n))$ na $\mathbb{B}(4)$. Stabilitu prostorově homogenního řešení \mathbf{w}^* systému $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ a tedy i stabilitu prostorově $(2, 2)$ -periodického řešení \mathbf{u}^* systému \mathcal{F} určíme metodou popsanou v odstavci 6.2. Linearizovaný operátor \mathcal{A} k zobrazení $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ v bodě \mathbf{w}^* odvodíme derivováním funkce $f_{\vec{p}}$. Protože \mathbf{w}^* je prostorově homogenní řešení, stačí vyjádřit pouze $f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)$. Platí

$$f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1) = \begin{pmatrix} g(u_{0,0}) + \frac{\varepsilon}{4}(g(u_{0,-1}) - 4g(u_{0,0}) + g(u_{0,1}) + g(u_{-1,0}) + g(u_{1,0})) \\ g(u_{1,0}) + \frac{\varepsilon}{4}(g(u_{1,-1}) - 4g(u_{1,0}) + g(u_{1,1}) + g(u_{0,0}) + g(u_{2,0})) \\ g(u_{0,1}) + \frac{\varepsilon}{4}(g(u_{0,0}) - 4g(u_{0,1}) + g(u_{0,2}) + g(u_{-1,1}) + g(u_{1,1})) \\ g(u_{1,1}) + \frac{\varepsilon}{4}(g(u_{1,0}) - 4g(u_{1,1}) + g(u_{1,2}) + g(u_{0,1}) + g(u_{2,1})) \end{pmatrix}.$$

Sestrojíme nejprve matice

$$\begin{aligned} A_{0,0} &= \frac{\partial f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)}{\partial w_{0,0}} & A_{-1,0} &= \frac{\partial f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)}{\partial w_{-1,0}} & A_{0,1} &= \frac{\partial f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)}{\partial w_{0,1}} \\ A_{1,0} &= \frac{\partial f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)}{\partial w_{1,0}} & A_{0,-1} &= \frac{\partial f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)}{\partial w_{0,-1}} & A_{-1,-1} &= \frac{\partial f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)}{\partial w_{-1,-1}} \\ A_{1,-1} &= \frac{\partial f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)}{\partial w_{1,-1}} & A_{-1,1} &= \frac{\partial f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)}{\partial w_{-1,1}} & A_{1,1} &= \frac{\partial f_{\vec{p}}(\{w_{0,0}\}^1)}{\partial w_{1,1}} \end{aligned}$$

Označme $d_x = g'(x)$ a $d_y = g'(y)$, potom

$$A_{0,0} = \begin{pmatrix} d_x (1 - \varepsilon) & \frac{d_y \varepsilon}{4} & \frac{d_y \varepsilon}{4} & 0 \\ \frac{d_x \varepsilon}{4} & d_y (1 - \varepsilon) & 0 & \frac{d_x \varepsilon}{4} \\ \frac{d_x \varepsilon}{4} & 0 & d_y (1 - \varepsilon) & \frac{d_x \varepsilon}{4} \\ 0 & \frac{d_y \varepsilon}{4} & \frac{d_y \varepsilon}{4} & d_x (1 - \varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$A_{0,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d_x \varepsilon}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_y \varepsilon}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{0,-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d_y \varepsilon}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d_x \varepsilon}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{-1,0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d_y \varepsilon}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d_x \varepsilon}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d_x \varepsilon}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_y \varepsilon}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

a $A_{-1,-1} = A_{-1,1} = A_{1,-1} = A_{1,1}$ jsou nulové matice. Operátor \mathcal{A} lze tedy zapsat ve tvaru

$$\mathcal{A} = A_{-1,0} \mathcal{S}^{(-1,0)} + A_{1,0} \mathcal{S}^{(1,0)} + A_{0,0} \mathcal{S}^{(0,0)} + A_{0,-1} \mathcal{S}^{(0,-1)} + A_{0,1} \mathcal{S}^{(0,1)}.$$

Podle věty 6.3 spektrum $\sigma(\mathcal{A})$ je množina všech λ , které splňují rovnici

$$\det \begin{pmatrix} d_x (1 - \varepsilon) - \lambda & \frac{d_y \varepsilon}{4} + \frac{d_y \varepsilon}{4 e^{it}} & \frac{d_y \varepsilon}{4} + \frac{d_y \varepsilon}{4 e^{iu}} & 0 \\ \frac{d_x \varepsilon}{4} + \frac{d_x e^{it} \varepsilon}{4} & d_y (1 - \varepsilon) - \lambda & 0 & \frac{d_x \varepsilon}{4} + \frac{d_x \varepsilon}{4 e^{iu}} \\ \frac{d_x \varepsilon}{4} + \frac{d_x e^{iu} \varepsilon}{4} & 0 & d_y (1 - \varepsilon) - \lambda & \frac{d_x \varepsilon}{4} + \frac{d_x \varepsilon}{4 e^{it}} \\ 0 & \frac{d_y \varepsilon}{4} + \frac{d_y e^{iu} \varepsilon}{4} & \frac{d_y \varepsilon}{4} + \frac{d_y e^{it} \varepsilon}{4} & d_x (1 - \varepsilon) - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

pro nějaké $(t, u) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

Kořeny této rovnice jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1 - \varepsilon)(d_x + d_y) \pm \sqrt{(1 - \varepsilon)^2(d_x - d_y)^2 + \frac{d_x d_y \varepsilon^2}{2}(\sqrt{1 + \cos t} - \sqrt{1 + \cos u})^2}}{2}$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{(1 - \varepsilon)(d_x + d_y) \pm \sqrt{(1 - \varepsilon)^2(d_x - d_y)^2 + \frac{d_x d_y \varepsilon^2}{2}(\sqrt{1 + \cos t} + \sqrt{1 + \cos u})^2}}{2}.$$

Podmínka stability $|\lambda| < 1$ pro $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ je ekvivalentní s podmínkami

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad |(d_x + d_y)(1 - \varepsilon)| < 1 + d_x d_y(1 - 2\varepsilon) \text{ a } |(d_x + d_y)(1 - \varepsilon)| < 2 \\ \quad \text{pro } d_x d_y \geq 0 \\ 2) \quad |(d_x + d_y)(1 - \varepsilon)| < 1 + d_x d_y(1 - \varepsilon)^2 \text{ a } |(d_x + d_y)(1 - \varepsilon)| < 2 \\ \quad \text{pro } d_x d_y < 0 \text{ a } (d_x - d_y)^2(1 - \varepsilon)^2 \geq -4d_x d_y \varepsilon^2 \\ 3) \quad 0 < d_x d_y(1 - 2\varepsilon) < 1, \\ \quad |(d_x + d_y)(1 - \varepsilon)| < 1 + d_x d_y(1 - \varepsilon)^2 \text{ a } |(d_x + d_y)(1 - \varepsilon)| < 2 \\ \quad \text{pro } d_x d_y < 0 \text{ a } (d_x - d_y)^2(1 - \varepsilon)^2 < -4d_x d_y \varepsilon^2 \end{array} \right\} \quad (46)$$

Uvažujme nyní systém (44) pro konkrétní funkci

$$g(x) = a x (1 - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rovnice (45) mají nyní tvar

$$\begin{aligned} x &= a x (1 - x) + \varepsilon (a y (1 - y) - a x (1 - x)) \\ y &= a y (1 - y) + \varepsilon (a x (1 - x) - a y (1 - y)) \end{aligned} \quad (47)$$

a platí

$$d_x = a(1 - 2x), \quad d_y = a(1 - 2y).$$

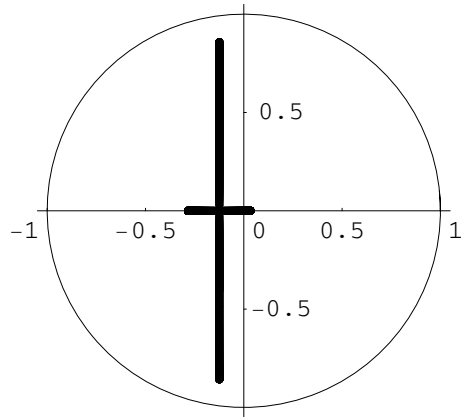
V článku [2] je diskutováno, pro které parametry a, ε existuje řešení rovnic (47).

Pro parametry

$$a > \frac{4\varepsilon - 1}{2\varepsilon - 1}, \quad \varepsilon > \frac{1}{2}$$

existuje řešení rovnic (47) takové, že $x \neq y$. Tedy existuje prostorově (2,2)-periodické stacionární řešení \mathbf{u}^* našeho mřížkového dynamického systému. Zvolíme-li parametry $a = 1/2$ a $\varepsilon = 9/10$ dostaneme periodické řešení, pro které

$$x = \frac{1}{15}(10 + \sqrt{10}), \quad y = \frac{1}{6}(4 + 2\sqrt{\frac{2}{5}}), \quad d_x = -\frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad d_y = -\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{5}{2}}.$$



Obrázek 8:

Pro tyto hodnoty jsou splněny podmínky 3) v nerovnicích (46) a prostorově (2,2)-periodické stacionární řešení \mathbf{u}^* je stabilní. Spektrum operátoru \mathcal{A} , ležící v jednotkovém kruhu, je zobrazeno na obrázku 8.

8 Závěr

V práci jsou uvedeny a dokázány věty, které určují spektrum speciálního lineárního operátoru $\mathcal{A} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$, kde

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{k}| \leq s} A_{\vec{k}} u_{\vec{j}+\vec{k}}.$$

Díky znalosti spektra tohoto operátoru, jsme schopni určit exponenciální stabilitu prostorově homogenního stacionárního řešení m -dimenzionálního mřížkového dynamického systému

$$(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}(d))_{n \in \mathbb{Z}^+},$$

definovaného zobrazením $\mathcal{F} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathcal{F}(\mathbf{u}(n)),$$

pro $\mathbf{u}(n) \in \mathbb{B}(d)$, kde

$$(\mathcal{F}\mathbf{u})_{\vec{j}} = f(\{u_{\vec{j}}\}^s).$$

Dále je v práci uveden postup, jak lze těchto výsledků využít k určení exponenciální stability prostorově \vec{p} -periodického stacionárního řešení našeho m -dimenzionálního mřížkového dynamického systému.

Dosažené výsledky jsou aplikovány na několik příkladů. Například je určena exponenciální stabilita prostorově periodického stacionárního řešení $(\dots, a, 2a, a, 2a, \dots)$ mřížkového dynamického systému daného vztahem

$$u_j(n+1) = g(u_j(n)) + \frac{\varepsilon}{2}(g(u_{j-1}(n)) - 2g(u_j(n)) + g(u_{j+1}(n))),$$

kde $g(u) = \begin{cases} \mu u & \text{for } u \in \langle 0, \mu^{-1} \rangle \\ a & \text{for } u \in (\mu^{-1}, 1) \end{cases}$ pro parametry $\mu = 2$, $\varepsilon = 1$, a $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.

Dále je určena exponenciální stabilita prostorově homogenního řešení mřížkového dynamického systému s dvojrozměrnou mřížkou

$$u_{ij}(n+1) = u_{ij}(n) + \alpha g(u_{ij}(n)) + \kappa(u_{i+1,j}(n) - 4u_{ij}(n) + u_{i-1,j}(n) + u_{i,j-1}(n) + u_{i,j+1}(n)),$$

kde $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha > 0$, $\kappa > 0$ a $g(u) = u(u-a)(1-u)$. Tento systém vznikne diskretizací dvoudimenzionální nelineární difuzní Huxleyovy rovnice použitím diferenční náhrady z pěti uzlových bodů.

Nakonec je uveden příklad mřížkového dynamického systému s dvojrozměrnou mřížkou

$$u_{i,j}(n+1) = g(u_{i,j}(n)) + \frac{\varepsilon}{4}(g(u_{i,j-1}(n)) - 4g(u_{i,j}(n)) + g(u_{i,j+1}(n)) + g(u_{i-1,j}(n)) + g(u_{i+1,j}(n))) ,$$

kde $g(x) = ax(1-x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. V práci je určena exponenciální stabilita prostorově $(2, 2)$ –periodického stacionárního řešení tohoto mřížkového dynamického systému pro konkrétní parametry $a = 1/2$ a $\varepsilon = 9/10$.

V budoucnu bychom se chtěli zaměřit na určování stability vlnových řešení v mřížkových dynamických systémech.

Literatura

- [1] B. Aupetit [1991] *A Primer on Spectral Theory*, Springer-Verlag New York inc.
- [2] V. S. Afraimovich, L. A. Bunimovich: *Simplest Structures in Coupled Map Lattices and their Stability*, Random & Computational Dynamics, 1(4), 1992–93, 423–444.
- [3] V. S. Afraimovich, L. A. Bunimovich: *Density of defects and spatial entropy in extended systems*. Physica, D80, 1995, 277–288.
- [4] V. S. Afraimovich, L. Y. Glebsky, V. I. Nekorkin: *Stability of Stationary States and Topological Spatial Chaos in Multidimensional Lattice Dynamical Systems*, Random & Computational Dynamics, 2(3&4), 1994, 287–303.
- [5] V. S. Afraimovich, V. I. Nekorkin: *Chaos of Traveling Waves in a Discrete Chain of Diffusively Coupled Map*, Random & Computational Dynamics, 2(3&4), 1994, 287–303.
- [6] Ch. Beck: *Spatio-Temporal Chaos and Vacuum Fluctuations of Quantized Fields*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Vol 21 (World Scientific), 2002.
- [7] L. A. Bunimovich, E. A. Carlen: *On the problem of stability in lattice dynamical systems*. J. of Diff. Equations, 123, 1995, 213–229.
- [8] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai: *Space-time chaos in coupled map lattices*, Nonlinearity 1, 1988, 491–516.
- [9] M. Dubcová, A. Klíč, P. Pokorný, D. Turzík: *Stability of Spatially Periodic Solutions in Coupled Map Lattices*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 13, No. 2, 2003, 343–356.
- [10] M. Dubcová, D. Turzík, A. Klíč: *Stability of Steady State Solutions in Multidimensional Coupled Map Lattices*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 14, No. 8, 2004, v tisku.
- [11] N. Dunford, J.T. Schwartz: *Linear operators, Part I: General Theory*. Interscience Publishers, New York, London 1958.
- [12] T. Erneux, G. Nicolis: *Propagating waves in discrete bistable reaction diffusion systems*, Physica D 67, 1993, 237–244.

- [13] P. R. Halmos: *A Hilbert Space Problem Book* (Princeton: D.Van Nostrand Company, Inc.),1967.
- [14] R. Harte: *Invertibility and singularity of operator matrices*. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 88, 1988, 103–118.
- [15] G. Iooss: *Bifurcation of Maps and Applications*. Amsterdam, North Holland 1979.
- [16] K. Kaneko, (Ed.): *Theory and Applications of Coupled Map Lattices*. (Chichester New York Brisbane Toronto Singapore), 1993.
- [17] R. Kapral: *Discrete models for chemically reacting systems*, J. Math. Chem. 6, 1991, 113–163.
- [18] J. P. Laplante, T. Erneux: *Propagation failure in arrays of coupled bistable chemical reactors*, J. Phys. Chem. 96, 1992, 4931–4934.
- [19] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum-nakladatelství UK, Praha 1998.
- [20] S. Y. Pilyugin: *Shadowing in Dynamical Systems*. (Springer), 1999.
- [21] A.E. Taylor: *Introduction to functional analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York 1967.
- [22] D. Turzík, M. Dubcová, A. Klíč, P. Pokorný: *Application of Bernoulli Shift to Investigation of Stability of Spatially Periodic Solutions in Lattices Dynamical Systems*, Dynamical Systems: an International Journal, Vol. 18, No. 1, 2003, 23-33.

Summary of PhD Thesis

Stability of Different Types of Solutions in Coupled Map Lattices

Miroslava Dubcová

In the thesis problems of Lattice dynamical systems (specially Coupled map lattices) are studied. Coupled map lattices (CML) are models for a wide class of time-space physical problems. One of the most important problems in the theory of CML is the stability problem of a steady state solution. That leads to the determination of the spectrum of the corresponding linearized operator. This problem was solved in case of 1-dimensional lattice in [2] and for multidimensional lattice in [4]. The basic method, used in both of these papers, is the method of finite dimensional approximations of the linearized operator. In this thesis we proposed another method for the determination of the spectrum of the linearized operator in case of 1-dimensional lattice. This method works well for spatially homogeneous and spatially periodic steady state solutions. Our approach is based on the representation of the corresponding linear operator as a combination of shifts on the lattice. The thesis deals with the one-dimensional and the multidimensional lattice case. The basic tool for the determination of the spectrum is Theorem of the image of the spectrum in the case of the one-dimensional lattice and the Gelfand transform of some appropriate Banach algebra in the case of the multidimensional lattice.

In this thesis theorems are introduced and proved, which determine the spectrum of a special linear operator $\mathcal{A} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$

$$(\mathcal{A}\mathbf{u})_{\vec{j}} = \sum_{|\vec{k}| \leq s} A_{\vec{k}} u_{\vec{j}+\vec{k}},$$

where

$$\mathbb{B}(d) = \{\mathbf{u} = \{u_{\vec{j}}\}_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m}, u_{\vec{j}} \in \mathbb{R}^d; \|\mathbf{u}\| < \infty\}.$$

On the set $\mathbb{B}(d)$ we consider the norm:

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|_{\infty} = \sup_{\vec{j} \in \mathbb{Z}^m} |u_{\vec{j}}|.$$

Thanks to the knowledge of the spectrum of this operator, we are able to determine the exponential stability of spatially homogeneous steady-state solutions in m -dimensional lattice dynamical system

$$(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}(d))_{n \in \mathbb{Z}_+},$$

defined by the mapping $\mathcal{F} : \mathbb{B}(d) \rightarrow \mathbb{B}(d)$

$$\mathbf{u}(n+1) = \mathcal{F}(\mathbf{u}(n))$$

for $\mathbf{u}(n) \in \mathbb{B}(d)$. Here

$$(\mathcal{F}\mathbf{u})_{\vec{j}} = f(\{u_{\vec{j}}\}^s), \text{ for } \vec{j} \in \mathbb{Z}^m,$$

where $\{u_{\vec{j}}\}^s = \{u_{\vec{k}}, |\vec{k} - \vec{j}| \leq s\}$, $|\vec{k}| = \max\{|k_1|, \dots, |k_m|\}$, $s \geq 1$ is an integer, and $f : \mathbb{R}^{d(2s+1)^m} \rightarrow \mathbb{R}^d$ is a class C^1 differentiable mapping.

In this thesis a method of application of this results to determine the exponential stability of spatially p -periodic steady-state solution m -dimensional lattice dynamical system $(\mathcal{F}^n, \mathbb{B}(d))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ is given.

Achieved results are applied to several examples.

- For example we determine the stability of spatially periodic steady-state solution $(\dots, a, 2a, a, 2a, \dots)$ of lattice dynamical system

$$u_j(n+1) = g(u_j(n)) + \frac{\varepsilon}{2}(g(u_{j-1}(n)) - 2g(u_j(n)) + g(u_{j+1}(n))),$$

where $g(u) = \begin{cases} \mu u & \text{for } u \in \langle 0, \mu^{-1} \rangle \\ a & \text{for } u \in (\mu^{-1}, 1) \end{cases}$ for parameters $\mu = 2$, $\varepsilon = 1$, and $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.

- The stability of spatially homogeneous steady-state solution of lattice dynamical system (with two-dimensional lattice)

$$u_{ij}(n+1) = u_{ij}(n) + \alpha g(u_{ij}(n)) + \kappa(u_{i+1,j}(n) - 4u_{ij}(n) + u_{i-1,j}(n) + u_{i,j-1}(n) + u_{i,j+1}(n)),$$

where $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$, $\kappa > 0$, $g(u) = u(u-a)(1-u)$ was given too. This system arises by discretization of the two-dimensional nonlinear Huxley diffusion equation. This system has (among other steady-state solutions) spatially homogeneous steady-state solutions $\mathbf{u}^* = \{0\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$, $\mathbf{u}^* = \{1\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$, $\mathbf{u}^* = \{a\}_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$. We determine the stability of these solutions.

- Finally was mentioned the example of lattice dynamical system with two-dimensional lattices

$$u_{i,j}(n+1) = g(u_{i,j}(n)) + \frac{\varepsilon}{4}(g(u_{i,j-1}(n)) - 4g(u_{i,j}(n)) + g(u_{i,j+1}(n)) + g(u_{i-1,j}(n)) + g(u_{i+1,j}(n))),$$

where $g(x) = ax(1 - x)$ for $x \in \mathbb{R}$.

For this system (with parameters $a = 1/2$ and $\varepsilon = 9/10$) was determined the stability of the spatially $(2, 2)$ -periodic steady-state solution.

Our further research in this field will focus on the stability of more complex solutions of CML, in particular of traveling wave solutions.